



TITLE:

# フェルミ原子光格子系の基礎知識 (<シリーズ>超伝導・超流動研究の 接点)

AUTHOR(S):

奥村, 雅彦

---

CITATION:

奥村, 雅彦. フェルミ原子光格子系の基礎知識(<シリーズ>超伝導・超流動研究の接点). 物性研究 2011, 96(6): 617-656

ISSUE DATE:

2011-09-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169614>

RIGHT:

---

**シリーズ 「超伝導・超流動研究の接点」**


---

## フェルミ原子光格子系の基礎知識

日本原子力研究開発機構 奥村 雅彦<sup>1</sup>

(2011 年 7 月 19 日受理)

### 目 次

<b>1 はじめに</b>	<b>618</b>
<b>2 1 体のフェルミ原子の制御</b>	<b>619</b>
2.1 ハミルトニアン	619
2.2 超微細構造	619
2.3 ラジオ波との相互作用	621
2.4 電場との相互作用	624
<b>3 2 体のフェルミ中性原子の制御</b>	<b>627</b>
3.1 散乱問題の基礎の復習	627
3.2 フェッシュバハ共鳴	629
<b>4 光格子系におけるハバード模型</b>	<b>634</b>
4.1 周期ポテンシャルの影響	635
4.2 調和型トラップ・ポテンシャルの影響	637
<b>5 観測方法</b>	<b>639</b>
<b>6 光格子系実験</b>	<b>642</b>
6.1 実験の流れ	642
6.2 様々な光格子	643
6.3 フェルミ原子光格子系の主な実験結果	644
6.4 その他	646
<b>7 まとめ</b>	<b>647</b>

---

<sup>1</sup>E-mail: okumura.masahiko@jaea.go.jp

## 1 はじめに

固体中の電子の振る舞いを記述するハバード模型 (Hubbard model) は、磁性・超伝導等の様々な物理現象を記述する最も単純な模型と考えられている [1, 2, 3, 4]。しかし、その単純さとは裏腹に、ハバード模型の物理の全容は明らかになっているとは言い難い。特に、量子相関が強い“強相関電子系”は解析的手法による扱いが難しいため、ハバード模型自体を何らかの方法で模擬的に作り出す (シミュレート) することが、その理解のための重要な方向の1つであると考えられる。それを可能にしたのが (古典) コンピューターを用いた数値シミュレーションである。その方法も、厳密対角化法、量子モンテカルロ法、密度行列繰り込み群法など、色々なアルゴリズムが提案され、それらを用いてこれまでに多くの計算が行われている。これらの数値シミュレーションの結果によってハバード模型についての理解は深まっていったと言えよう [5]。しかし、提案されている数値シミュレーション法は万能ではなく、我々が知りたい無限系のハバード模型の性質を知るには何か本質的な発展が必要とされている。

このように難攻不落のハバード模型に対して、最近新しいシミュレーション方法が提案され、実現しつつある。それがハバード模型の“量子シミュレーター”としての“フェルミ原子光格子系”である。この系はレーザーで作られた“光格子”に中性原子を閉じ込め、固体中の電子をシミュレートしようとする試みで、いわゆる量子シミュレータ [6, 7, 8] の一種である。この試みは数値シミュレーションとは全く異なるハバード模型へのアプローチであり、解析的手法、数値シミュレーションと相補的に利用する事により、ハバード模型の理解を深められると期待されている。

そもそも、量子多体系の数値シミュレーションを困難なものにしているのは“量子性”であった。なぜならば、古典系と異なり、量子系の計算は量子力学の“重ね合わせの原理”により取りうる全ての状態を考慮しなければならないからである。このために、例えば厳密対角化法などでは、扱う系を大きくしていくと、必要となるメモリ量などが指数関数的に増えていき、あっという間に計算機資源が足りなくなるのである<sup>2</sup>。一方で、本稿で取り上げる量子シミュレーター (フェルミ原子光格子系) は「制御可能な量子系で他の量子系を模倣する」ものであるが、この定義からして数値シミュレーションでの問題点を克服している。つまり、量子系によって量子系を模倣するため、“量子性”は問題にならないのである。

このように、“量子シミュレーター”はこれまでの数値シミュレーションの問題点を原理的に克服しているという点で非常に興味深い。もちろん、量子シミュレーターにも様々な限界があると考えられるが、数値シミュレーションの限界を超えた知見を我々に与えてくれるのは間違いないであろう。さらに、量子シミュレーターを使えば、我々が勝手に考えた“物理系”をも実現可能である。今後は、勝手にハミルトニアンを構築して勝手にその物性を研究しても、それを実験で検証可能になるかもしれないのである。これは、未だ発見されていない新現象がこの系で発見される可能性があることを示唆している。つまり、量子シミュレータは“自然現象を模倣する”だけでなく、“自然現象を作り出す”可能性も秘めているのである。

本稿では、このような可能性を秘めた“量子シミュレーター”の一種である、フェルミ原子光格

<sup>2</sup>他の方法でもフェルミオン系には (なぜか) 本質的困難が伴うようである。

子系の基礎知識について解説する。具体的には、フェルミ原子の制御の方法を解説し、実験で行われている操作を理解する事を目標とする。まず、第2章では1体のフェルミ原子の制御方法について述べる。次に、第3章ではフェルミ原子同士の衝突について説明する。そして、第4章では、光格子系におけるハバード模型、特に周期ポテンシャルと調和型トラップ・ポテンシャルの共存効果について述べる。第5章では現在行われている観測方法について簡単に述べ、第6章ではこれまでに行われているフェルミ原子光格子系を中心に、実験結果などについて簡単に触れる。

本稿では、 ${}^6\text{Li}$  と  ${}^{40}\text{K}$  を中心に扱い、他の原子種にはあまり触れない。ボース系を含めた中性原子気体系全般は文献 [9, 10, 11, 12, 13] とその参考文献を、Yb に関しては本家本元の解説記事 [14] を参照されたい。また、フェルミ原子光格子系についても優れたレビューが数多くあるので、そちらも参考にしていきたい [9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]。

## 2 1体のフェルミ原子の制御

まず、1体の中性フェルミ原子について外場との相互作用を考え、中性原子に対して、外場によってどのような操作が可能かを見てみよう (詳しくは文献 [10, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28] などを参照のこと)。

### 2.1 ハミルトニアン

外部電場  $\mathbf{E}$  と外部磁場  $\mathbf{B}$  と相互作用する中性フェルミ原子は以下のハミルトニアンで近似的に記述される [23, 24, 25]。

$$\hat{H}_1(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{hf}} + \hat{H}_Z(\mathbf{B}) + \hat{H}_{\text{ED}}(\mathbf{E}) \quad (1)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2\bar{m}_r} + \hat{V}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2)$$

$$\hat{H}_{\text{hf}} = \frac{a_{\text{hf}}}{\hbar^2} \hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \quad (3)$$

$$\hat{H}_Z(\mathbf{B}) = \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} = \left( \frac{g_e \mu_B}{\hbar} \hat{\mathbf{S}} - \frac{\mu}{\hbar I} \hat{\mathbf{I}} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\hat{H}_{\text{ED}}(\mathbf{E}) = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E} \quad (5)$$

ここで、 $\hbar = h/2\pi$  で  $h$  はプランク定数、 $\hat{p}$  と  $\hat{P}$  はそれぞれ最外殻電子とそれ以外 (内殻電子と原子核) の相対運動量と重心運動量、 $M$  と  $\bar{m}_r$  はそれぞれそれらの重心質量と換算質量、 $\hat{\mathbf{x}}$  はそれらの相対座標、 $\hat{V}$  はそれらの間のポテンシャル、 $a_{\text{hf}}$  は各原子の超微細構造定数、 $\mu_B = e\hbar/2m_e$  はボーア磁子、 $\mu$  は核磁気モーメント、 $\hat{\mathbf{D}} = e\hat{\mathbf{x}}$  は電気双極子演算子である ( $e$  は素電荷、 $m_e$  は電子の質量)。

では、順を追ってこのハミルトニアンの性質を見ていこう。

### 2.2 超微細構造

まず、外場がない場合 ( $\mathbf{B} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ) を考えよう。ここでは、原子の内部自由度としてスピン自由度に焦点を当てるため、 $\hat{H}_0$  は無視する。

一般に原子は核スピン  $\hat{I}$  と電子スピン  $\hat{S}$  を持つが、アルカリ原子は1つの最外殻電子を持つので、 $S = |\langle \hat{S} \rangle|/\hbar = 1/2$  として良い。また、基底状態を考えると、電子は角運動量を持たない ( $\langle \hat{L} \rangle = 0$ )。そして、電子スピンは核スピンの作る磁場による超微細相互作用を介して核スピンと結合し、全角運動量  $\hat{F}$  は  $\hat{F} = \hat{I} + \hat{S}$  となる。ここで、 $S = 1/2$  より、 $F = I \pm 1/2$  となることがわかる ( $F = |\langle \hat{F} \rangle|/\hbar$ ,  $I = |\langle \hat{I} \rangle|/\hbar$ )。これらの式と  $S = 1/2$  より、

$$\langle \hat{H}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \rangle = \langle \hat{H}_{\text{hf}} \rangle = \frac{a_{\text{hf}}}{2} \left[ F(F+1) - I(I+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (6)$$

が得られる。これより、超微細相互作用に起因するエネルギー差  $\Delta E_{\text{hf}}$  ( $F = I+1/2$  と  $F = I-1/2$  のエネルギー差)

$$\Delta E_{\text{hf}} = h\nu_{\text{hf}} = \left( I + \frac{1}{2} \right) a_{\text{hf}} \quad (7)$$

が得られる (図1も参照)。この式と  $\nu_{\text{rf}}$  の測定値から  $a_{\text{hf}}$  が求まる (表1)。 $\Delta E_{\text{hf}}$  に関するさらなる理論的考察は [10] を参照されたい。

同位体	$Z$	$N$	$I$	$\mu/\mu_n$	$\nu_{\text{hf}}$ [MHz]
$^6\text{Li}$	3	3	1	0.822	228
$^{40}\text{K}$	19	21	4	-1.298	-1286

表 1: 陽子数  $Z$ 、中性子数  $N$ 、核スピン  $I$ 、核磁気モーメント  $\mu$ 、超微細分裂  $\nu_{\text{hf}}$  ( $\mu_n = e\hbar/2m_p$  は核磁子 ( $m_p$  は陽子の質量))[10]

次に  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  の場合を考えよう。 $\mathbf{B}_z = (0, 0, B)$  のように  $z$  軸方向に磁場をかけるとすると、ハミルトニアンは  $|m_I, m_S\rangle$  の基底で、

$$\langle \hat{H}_1(\mathbf{B}_z, \mathbf{0}) \rangle = \frac{a_{\text{hf}}}{\hbar^2} \langle \hat{I} \cdot \hat{S} \rangle + g_e \mu_B B m_S - \frac{\mu}{I} B m_I \quad (8)$$

と書ける ( $m_S, m_I$  はそれぞれ電子スピン、核スピンの磁気量子数)。ここで、ハミルトニアン (3)、(8) は全角運動量を保存するので、量子数  $m_F = m_I + m_S$  ごとにブロック対角になる。それぞれのハミルトニアン  $\hat{H}_{m_F}(\mathbf{B}_z)$  の期待値は

$$\langle \hat{H} \rangle_{I+1/2}(\mathbf{B}_z) = \frac{1}{2} a_{\text{hf}} I + \frac{1}{2} g_e \mu_B B - \mu B \quad (9)$$

$$\langle \hat{H} \rangle_{m_I+1/2}(\mathbf{B}_z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_{\text{hf}} m_I + \frac{1}{2} g_e \mu_B B - \frac{\mu}{I} B m_I & \frac{1}{2} \sqrt{I(I+1) - m_I(m_I+1)} a_{\text{hf}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{I(I+1) - m_I(m_I+1)} a_{\text{hf}} & -\frac{1}{2} a_{\text{hf}}(m_I+1) - \frac{1}{2} g_e \mu_B B - \frac{\mu}{I} B(m_I+1) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\langle \hat{H} \rangle_{-I-1/2}(\mathbf{B}_z) = \frac{1}{2} a_{\text{hf}} I - \frac{1}{2} g_e \mu_B B + \mu B \quad (11)$$

となる。そして、それぞれの固有値  $E_{m_F}$  は

$$E_{I+1/2} = \frac{1}{2}a_{\text{hf}}I + \frac{1}{2}g_e\mu_B B - \frac{\mu}{I}B \quad (12)$$

$$E_{m_I+1/2} = -\frac{1}{4}a_{\text{hf}} - \left(m_I + \frac{1}{2}\right)\frac{\mu}{I}B \pm \frac{1}{2}\sqrt{[I(I+1) - m_I(m_I+1)]a_{\text{hf}}^2 + \left[\left(m_I + \frac{1}{2}\right)a_{\text{hf}} + \left(g_e\mu_B + \frac{\mu}{I}\right)B\right]^2} \quad (13)$$

$$E_{-I-1/2} = \frac{1}{2}a_{\text{hf}}I - \frac{1}{2}g_e\mu_B B + \frac{\mu}{I}B \quad (14)$$

となることが分かる。

これらの式と表 1 を基に  $^6\text{Li}$  と  $^{40}\text{K}$  の超微細分裂の磁場依存性を描いたのが図 1 である。図 1 で傾きが正の状態を求弱場状態 (weak field seeking state)、負の状態を求強場状態 (strong field seeking state) と呼ぶ。

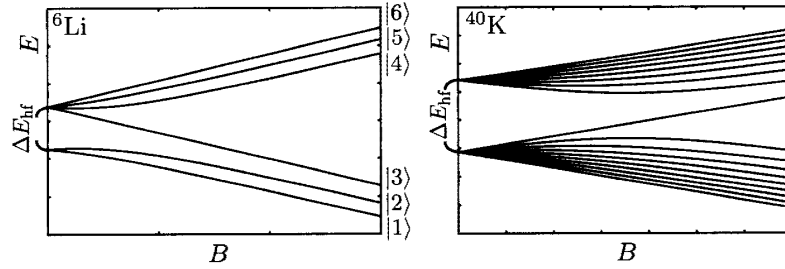


図 1:  $^6\text{Li}$  と  $^{40}\text{K}$  の超微細構造。

また、今後のために、 $^7\text{Li}$  の場合に、以下のようにエネルギーの低い順に各状態に番号を名前として付けておこう。

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |F=1/2, m_f=1/2\rangle, & |2\rangle &= |F=1/2, m_f=-1/2\rangle, & |3\rangle &= |F=3/2, m_f=-3/2\rangle, \\ |4\rangle &= |F=3/2, m_f=-1/2\rangle, & |5\rangle &= |F=3/2, m_f=1/2\rangle, & |6\rangle &= |F=3/2, m_f=3/2\rangle \end{aligned}$$

実際の実験では、このうち 2 つの状態を選び、それぞれをスピン・アップ、スピン・ダウンの状態として扱う (例:  $|\uparrow\rangle = |1\rangle$ 、 $|\downarrow\rangle = |2\rangle$ )。これらを“擬スピン (pseudo spin)”と呼んだりもする。

### 2.3 ラジオ波との相互作用

これまでは中性原子と外部磁場との相互作用による静的な性質を見てきたが、次に、中性原子とラジオ波 (radio frequency field, RF field) との相互作用による、中性原子の動的な制御についてみてみよう。ラジオ波は約数  $m$  の波長を持ち、中性原子系 ( $\sim 100\mu\text{m}$ ) にほぼ一様に作用する。

ここでは、以下のように、先ほど考えたハミルトニアンに、定常外部磁場  $\mathbf{B}_0$  と周期的に変動する外部磁場  $\mathbf{B}_{\text{rf}}(t)$  を代入したものを考えてみよう。

$$\hat{H}_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{rf}}(t), \mathbf{0}) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{hf}} + \hat{H}_Z(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{rf}}(t)) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{hf}} + \hat{H}_Z(\mathbf{B}_0) + \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rf}}(t) \quad (15)$$

ここで、

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{rf}} = \begin{pmatrix} B_{\text{rf}} \cos(\omega t) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

とする。前の章で、ハミルトニアン (15) の最右辺の第 2 項と第 3 項の和を対角的にする状態を得たので、この状態を基に議論を進めよう。特に、ここからは、そのうちの 2 つの状態 (ここでは  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  を選ぶ) に着目しよう。この 2 つの準位以外のエネルギー準位はこれから考える物理過程に寄与しないとして省略し、ここでも  $\hat{H}_0$  を省略すると、ハミルトニアン (15) は

$$\hat{H}_1(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{rf}}(t), \mathbf{0}) \simeq \hat{H}_{\text{rf}} = \hat{H}_{\text{rf},0} + \hat{V}_{\text{rf}}(t) \quad (17)$$

$$\hat{H}_{\text{rf},0} = \sum_{i=1}^2 E_i |i\rangle \langle i| \quad (18)$$

$$\hat{V}_{\text{rf}}(t) = \mu_{12} B_{\text{rf}} \cos(\omega t) (|1\rangle \langle 2| + \text{H.c.}) \quad (19)$$

と簡略化できる。ただし、 $\mu_{ij} = \langle i | \hat{\mu}_x | j \rangle$  とした。さて、これからハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{rf}}$  (19) に従うシュレーディンガー方程式 (Schrödinger equation)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{rf}} |\psi(t)\rangle \quad (20)$$

を解こう。

波動関数を

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle \quad (21)$$

と展開すると、

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = E_1 C_1 + \hbar \Omega_R \cos(\omega t) C_2, \quad i\hbar \frac{dC_2}{dt} = E_2 C_2 + \hbar \Omega_R \cos(\omega t) C_1 \quad (22)$$

が得られる。ただし、 $\Omega_R$  は  $\Omega_R = \mu_{12} B_{\text{rf}} / \hbar$  で定義され、ラビ振動数 (Rabi frequency) と呼ばれる。これらの方程式を近似を用いて解くために、

$$c_i = C_i e^{-E_i t / i\hbar} \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

を導入しよう。これらの満たす方程式は

$$i \frac{dc_1}{dt} = \frac{\Omega_R}{2} \left[ e^{i(\omega_{21} + \omega)t} + e^{i(\omega_{21} - \omega)t} \right] c_2, \quad i \frac{dc_2}{dt} = \frac{\Omega_R}{2} \left[ e^{-i(\omega_{21} - \omega)t} + e^{-i(\omega_{21} + \omega)t} \right] c_1 \quad (24)$$

となる。ただし、 $\omega_{21} = (E_2 - E_1) / \hbar$  とした。

これらの方程式を眺めてみると、2 つの時間スケール  $(\omega_{21} - \omega)^{-1}$  と  $(\omega_{21} + \omega)^{-1}$  が内在している事がわかる。そこで、はやい運動を記述している  $(\omega_{21} + \omega)^{-1}$  に関係する項を落とす近似を採用する (これは回転波近似 (rotating wave approximation) と呼ばれている)。すると、式 (24) は

$$i \frac{dc_1}{dt} = \frac{\Omega_R}{2} e^{i(\omega_{21} - \omega)t} c_2, \quad i \frac{dc_2}{dt} = \frac{\Omega_R}{2} e^{-i(\omega_{21} - \omega)t} c_1 \quad (25)$$

となることがわかる。ここで、さらに

$$\tilde{c}_1 = c_1 e^{-i\Delta t}, \quad \tilde{c}_2 = c_2 e^{i\Delta t} \quad (26)$$

という変数変換を行うと、式 (25) は

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega_R \\ \Omega_R & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。ただし、 $\Delta = \omega_{21} - \omega$  とした。この微分方程式と式 (23)、(26) より

$$C_1(t) = \left[ \left\{ \cos \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) + i \frac{\Delta}{\Omega_{gR}} \sin \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) \right\} C_1(0) + i \frac{\Omega_R}{\Omega_{gR}} \sin \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) C_2(0) \right] e^{i \frac{\Delta}{2} t} e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} \quad (28)$$

$$C_2(t) = \left[ \left\{ \cos \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) - i \frac{\Delta}{\Omega_{gR}} \sin \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) \right\} C_2(0) + i \frac{\Omega_R}{\Omega_{gR}} \sin \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) C_1(0) \right] e^{-i \frac{\Delta}{2} t} e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} \quad (29)$$

を得る。ただし、 $\Omega_{gR} = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$  とした。これは一般化されたラビ振動数 (generalized Rabi frequency) と呼ばれる量である。

さて、この得られた解を用いて、ラジオ波による状態遷移を考えてみよう。時刻  $t = 0$  から原子にラジオ波を当て始め、時刻  $t$  に状態  $|i\rangle$  にいる確率は  $|C_i(t)|^2$  ( $i = 1, 2$ ) なので、初期時刻  $t = 0$  で状態  $|1\rangle$  にあったとすると ( $C_1(0) = 1$ ,  $C_2(0) = 0$ )、時刻  $t$  における状態  $|1\rangle$  にいる確率から状態  $|2\rangle$  を引いた反転量 (inversion)  $W(t)$  は

$$W(t) = |C_1(t)|^2 - |C_2(t)|^2 = \frac{\Delta^2 - \Omega_R^2}{\Omega_{gR}^2} \sin^2 \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) + \cos^2 \left( \frac{\Omega_{gR}}{2} t \right) \quad (30)$$

となる。この反転量  $W(t)$  は定義から明らかなように、 $-1 \leq W(t) \leq 1$  の値を取り、 $0 < W(t)$  ( $0 > W(t)$ ) の時は状態  $|1\rangle$  ( $|2\rangle$ ) にいる割合の方が多く、 $W(t) = 0$  の時に半々の割合、 $W(t) = 1$  ( $W(t) = -1$ ) の時に完全に状態  $|1\rangle$  ( $|2\rangle$ ) にいることがわかる。

さて、特に、外場の角振動数が 2 準位のエネルギー差に等しい場合 (共鳴 (resonance):  $\Delta = \Omega$ ) は

$$W(t) = \cos(\Omega_R t) \quad (31)$$

となり、 $W(t)$  はラビ振動数で  $-1$  と  $1$  の間を振動することがわかる。この性質を用いると、ラジオ波を当てる時間によって、(擬) スピン  $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  の重ね合わせ状態を作り出すことができる。特に、時間  $t = \pi/2\Omega_R$  だけ当てた場合は、状態  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  が半分ずつ重ね合わさっている状態になる。この時のラジオ波の波束を  $\pi/2$  パルス ( $\pi/2$  pulse) と呼ぶ。また、時間  $t = \pi/\Omega_R$  だけ当てた場合は状態が全て  $|2\rangle$  になる。この時のラジオ波の波束を  $\pi$  パルス ( $\pi$  pulse) と呼ぶ。これら 2 つの場合に限らず、ラジオ波を当てる時間を調節する事で、任意の比率で状態  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  を重ね合わせた状態を作り出すことができる。

ここで注意したいのは、ラジオ波を当てて出来る状態はあくまで重ね合わせ状態であるという点である。それゆえ、(擬) スピンが 1:1 で混ざり合った系や、スピン・インバランス系を作り出すには、適当な時間だけラジオ波を当てた後、その重ね合わせ状態がインコヒーレントになるまでまつ必要がある事に注意しよう [26]。



## 2.4 電場との相互作用

ここでは、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$  の場合を考えよう。そのときのハミルトニアンは

$$\hat{H}_1(\mathbf{0}, \mathbf{E}) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{hf}} + \hat{H}_{\text{ED}}(t) \quad (32)$$

となる。ただし、ここでは、電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t) = eE(\mathbf{r}) \cos(\omega t) \quad (33)$$

のように空間と時間に依存しているとしよう (ただし、 $|e| = 1$ )。さて、ここでも簡単化のため、 $|g\rangle$  と  $|e\rangle$  からなる 2 準位系を考え、この時間に依存する外場項  $\hat{H}_{\text{ED}}(t)$  を摂動として扱って、それによる基底状態のエネルギー変化を求めてみよう。また、 $\hat{H}_{\text{hf}}$  は今考える物理に大きな影響を与えないので、ここでは省略する。これらの簡略化により、ハミルトニアン (32) は

$$\hat{H}_1(\mathbf{0}, \mathbf{E}) \simeq \hat{H}_{\text{ed}} = \hat{H}_{\text{ed},0} + \hat{V}_{\text{ed}}(\mathbf{r}, t) \quad (34)$$

$$\hat{H}_{\text{ed},0} = E_g |g\rangle\langle g| + E_e |e\rangle\langle e| \quad (35)$$

$$\hat{V}_{\text{ed}}(\mathbf{E}, t) = \hbar \bar{\Omega}_R(\mathbf{r}) \cos(\omega t) f(t) |e\rangle\langle g| + \text{H.c.} \quad (36)$$

と表すことができる。ただし、時間  $\tau$  だけかけて相互作用のスイッチを入れるような関数  $f(t)$  を導入し (補遺を参照)、 $\bar{\Omega}_R(\mathbf{r}) = -\langle e | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) | g \rangle / \hbar$  ( $E_g < E_e$ ) とした。

このハミルトニアンに従うシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H}_{\text{ed}} |\psi\rangle = [\hat{H}_{\text{ed},0} + \hat{V}_{\text{ed}}(t)] |\psi\rangle \quad (37)$$

と書ける。相互作用描像に移ると、次の方程式を得る。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = \hat{V}_{\text{ed},I}(t) |\psi\rangle_I \quad (38)$$

ここで、

$$|\psi\rangle_I = e^{\hat{H}_{\text{ed},0}t/\hbar} |\psi\rangle, \quad \hat{V}_{\text{ed},I}(t) = e^{-\hat{H}_{\text{ed},0}t/\hbar} \hat{V}_{\text{ed}}(t) e^{\hat{H}_{\text{ed},0}t/\hbar} \quad (39)$$

である。これより、

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(0)\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{V}_{\text{ed},I}(t') |\psi(t')\rangle_I \quad (40)$$

を得る。

ここで、 $|\psi\rangle_I$  を次のように展開しよう。

$$|\psi\rangle_I = a_g(t) |g\rangle + a_e(t) |e\rangle \quad (41)$$

この式を式 (38) に代入すると

$$i\hbar \frac{da_g(t)}{dt} = V_{\text{ed},I,ge}(t) a_e(t) \quad (42)$$

$$i\hbar \frac{da_e(t)}{dt} = V_{\text{ed},I,eg}(t) a_g(t) \quad (43)$$

が、式 (40) に代入すると

$$a_g(t) = a_g(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' V_{ed,I,ge}(t') a_e(t') \quad (44)$$

$$a_e(t) = a_e(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' V_{int,I,eg}(t') a_g(t') \quad (45)$$

が得られる。ここで、

$$V_{ed,I,ge}(t) = \langle g | \hat{V}_{ed,I}(t) | e \rangle = \hbar \bar{\Omega}_R(\mathbf{r}) \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} f(t) \quad (46)$$

$$V_{ed,I,eg}(t) = \langle e | \hat{V}_{ed,I}(t) | g \rangle = \hbar \bar{\Omega}_R(\mathbf{r}) \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} f(t) \quad (47)$$

である。ただし、 $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$  とした。

さて、式 (44) に式 (46) を代入して、摂動の 1 次で問題を解くと、

$$a_e(t) = \frac{\bar{\Omega}_R(\mathbf{r})}{2} \left[ \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)t}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i(\omega + \omega_0)t}}{\omega + \omega_0} \right] a_g(t) \quad (48)$$

が得られる (補遺を参照)。そして、この式 (48) を式 (42) に代入して、ここでもはやい運動を無視する回転波近似を用いると、

$$i \frac{da_g(t)}{dt} = \frac{\bar{\Omega}_R^2(\mathbf{r})}{4} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right] a_g(t) \quad (49)$$

が得られる。ここで、相互作用表示の係数  $a_g$  からシュレーディンガー表示の係数  $\alpha_g$  の関係式

$$\alpha_g(t) = e^{E_g t / i\hbar} a_g(t) \quad (50)$$

を用いると、シュレーディンガー表示の係数  $\alpha_g$  は下記の方程式を満たす。

$$i \frac{d\alpha_g(t)}{dt} = \left[ \frac{E_g}{\hbar} + \frac{\bar{\Omega}_R^2(\mathbf{r})}{4} \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right\} \right] \alpha_g(t) \quad (51)$$

これはつまり、相互作用によってエネルギーが

$$\Delta E_g(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 \bar{\Omega}_R^2(\mathbf{r})}{4} \left[ \frac{1}{\hbar\omega - (E_e - E_g)} - \frac{1}{\hbar\omega + (E_e - E_g)} \right] \quad (52)$$

だけずれた事を示している。ここで、強度 (intensity)  $I$  を、電場の振幅の 2 乗を  $2\pi/\omega$  よりも十分長い時間  $T$  で平均したもの

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t') = \frac{E^2(\mathbf{r})}{2} \quad (53)$$

で定義しよう。これを用いると式 (52) は

$$\Delta E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \langle e | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e} | g \rangle^2 I(\mathbf{r}) \left[ \frac{1}{\hbar(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{\hbar(\omega + \omega_0)} \right] \quad (54)$$

と表す事ができる。これはシュタルクシフト (Stark shift) と呼ばれる。

さて、この結果について考えてみよう。まず、電場の角振動数 $\omega$ の値に注目しよう。まず、 $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$ を基準として角振動数の高い側に $\omega$ が離調している場合 (青方離調 (blue detune))、すなわち $\omega > \omega_0$ の場合は $\Delta E_g(\mathbf{r}) > 0$ である。これはつまり、正のポテンシャルを感じるという事を意味しており、原子は電場が強い場所で斥力を感じるという事である。逆に、 $\omega_0$ を基準として $\omega$ が角振動数の低い側に離調している場合 (赤方離調 (red detune))、すなわち $\omega < \omega_0$ の場合は $\Delta E_g(\mathbf{r}) < 0$ となり、電場が強い場所で引力を感じる事になる。

つまり、この結果を利用すれば、レーザーによって原子を捕獲する事ができるのである。実際の実験では、レンズを通したレーザー強度は以下のようなガウシアン分布

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \quad (55)$$

を示す [28]。ただし、 $z$  軸方向にレーザーを照射しているとした。ここで、 $P$  は出力 (power)、

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (56)$$

で、 $W_0$  はビーム・ウエストと呼ばれる量であり ( $1/e^2$  直径 ( $1/e^2$  diameter) と呼ばれる)、 $z_R = \pi W_0^2/\lambda_L$  はレイリー長 (Rayleigh length) である ( $\lambda_L$  はレーザーの波長)。

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \Delta E(\mathbf{r}) = \frac{P\langle e|\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}|g\rangle^2}{\pi W^2(z)} \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2(z)}\right) = V_0 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \quad (57)$$

という双極子トラップ・ポテンシャル (dipole trap potential) ができることになる。ここで、

$$V_0 = V_{\text{dip}}(\mathbf{0}) = \frac{P\langle e|\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}|g\rangle^2}{\pi W_0^2} \quad (58)$$

はポテンシャル深度 (potential depth) と呼ばれる量である。

双極子トラップ・ポテンシャルの形は上記のようにガウシアンであるが、系の温度 $T$ がポテンシャル深度に対して十分に低い場合、つまり $V_0 \gg k_B T$ の場合 ( $k_B$  はボルツマン定数 (Boltzmann constant))、調和型トラップ・ポテンシャル

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq -V_0 \left[ 1 - 2\left(\frac{r}{W_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_R}\right)^2 \right] = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (59)$$

に近似できる。ここで、

$$\omega_r = \sqrt{\frac{4V_0}{mW_0^2}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{2V_0}{mz_R^2}} \quad (60)$$

である。これはつまり、一方向からレーザーを照射すれば3次元的な調和型トラップ・ポテンシャルができる事を示している。

さて、ここまでで、レーザーを使って原子を捕獲できる事がわかったが、このレーザーで定在波を作ったらどうなるかを見てみよう。赤方離調のレーザーを反射させて定在波を作ると、トラップ・ポテンシャルは

$$V_{\text{lat}} = -V_0 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \sin^2(k_L z) \simeq V_0 \cos^2(k_L z) + \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (61)$$

となり、光格子と調和型トラップ・ポテンシャルの組合わさった“光格子系”ができる ( $k_L = 2\pi/\lambda_L$  はレーザーの波数)。

最後に、光格子系で基準となるエネルギー・スケール、反跳エネルギー (recoil energy)  $E_r$  を定義しておく。

$$E_r = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2m} \quad (62)$$

光格子系で問題となるエネルギーは、この  $E_r$  で規格化されている事がほとんどである。

### 3 2体のフェルミ中性原子の制御

次に、光格子系が量子シミュレーターとして機能するために重要な働きをするフェッシュバッチハ共鳴 (Feshbach resonance)[29, 30, 31, 32] について述べる。フェッシュバッチハ共鳴についての詳しい考察は文献 [33, 34, 35, 36, 37] とその引用文献を参照。

#### 3.1 散乱問題の基礎の復習

フェッシュバッチハ共鳴を考える前に、まず、冷却原子の散乱について復習しよう [10, 38, 39]。それぞれ質量  $m_1, m_2$  の2粒子の相対運動を記述する、自由ハミルトニアン  $\hat{H}_0 = -\hat{p}^2/(2m_r)$  とポテンシャル  $\hat{V}(\hat{r})$  の和で表されるハミルトニアンに従う位置表示のシュレーディンガー方程式

$$(\nabla^2 + k^2)u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (63)$$

$$k^2 = \frac{2m_r E}{\hbar^2}, \quad U(\mathbf{r}) = \frac{2m_r}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \quad (64)$$

を考えよう ( $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  は換算質量、 $\mathbf{r}$  は相対座標、 $E$  は相対運動のエネルギー)。この方程式を満たす散乱状態固有関数  $u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$  は「入射波+外向き球面波」境界条件

$$u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{out}, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \frac{1}{r} e^{ikr} F(\theta, \varphi) \right] \quad (65)$$

を満たしているとしよう ( $r = |\mathbf{r}|$ 、 $k = |\mathbf{k}|$ 、 $F(\theta, \varphi)$  は散乱振幅)。ここで、入射波  $u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r})$  を  $\mathbf{k}$  を極軸に選んでレイリー (Rayleigh) の公式を用いると、次式を得る (部分波展開)。

$$u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (66)$$

ここで、 $j_{\ell}(x)$  は球ベッセル関数 (spherical Bessel function)<sup>3</sup>、 $P_{\ell}(x)$  はルジャンドルの多項式 (Legendre polynomials)<sup>4</sup>である。この展開式 (66) の  $j_{\ell}(kr)$  は  $r = b_{\ell}$  ( $b_{\ell} = \ell/k$ ) 付近で第1極大値を持つ。つまり、有効到達距離  $\alpha$  を持つ短距離力による散乱の場合、影響を受ける部分波は

$$b_{\ell} = \frac{\ell}{k} < \alpha \quad (67)$$

<sup>3</sup>  $j_{\ell}(x) = (-x)^{\ell} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\ell} \frac{\sin x}{x}$

<sup>4</sup>  $P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}$

を満たすものだけである<sup>5</sup>。ここで、典型的な例として温度  $1\mu\text{K}$  の  $^{40}\text{K}$  原子がファンデルワールス力 (van der Waals force) ( $\alpha \sim 100a_0$ ) で相互作用する場合を考えると ( $a_0$  はボーア半径 (Bohr radius))、 $\ell < k\alpha \sim 5 \times 10^{-3}$  であるため、 $\ell = 0$ 、つまり s 波の散乱だけを考えれば十分であることがわかる。よって、以降は  $\ell = 0$  の場合のみを考えよう。その場合、低エネルギー散乱の外向き球面波についても  $F(\theta, \varphi)$  は  $\theta$  と  $\varphi$  どちらにも依存しないので、単純な次元解析から以下の事が言える。

$$\psi_{\text{out}, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{r \rightarrow \infty} -\frac{a}{r} \quad (68)$$

ここで、 $a$  は「s 波散乱長 (s-wave scattering length)」と呼ばれる長さの次元を持った定数である。このとき、全散乱断面積  $\sigma$  は、

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta |F(\theta, \varphi)|^2 = 4\pi a^2 \quad (69)$$

となる。これは、半径  $a$  の剛体球の散乱断面積と同じである。

一方で、式 (63) のグリーン関数 (Green function) は

$$(\nabla^2 + k^2) G_k^\pm(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (70)$$

$$G_k^\pm(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\hbar^2}{2m_r} \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E_k - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle \quad (71)$$

であるので、

$$u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) - \int d^3\mathbf{r}' G_k^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}') \quad (72)$$

$$|u_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle = |u_{\mathbf{k}}^{(0)}\rangle + \frac{1}{E_k - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} |u_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle \quad (73)$$

と書く事ができる ( $\epsilon$  は正の無限小実数)。これらの式はリップマン・シュウインガー方程式 (Lippmann-Schwinger equation) と呼ばれる。

ここで、エネルギー殻上の (on the energy shell) 演算子  $\hat{T}$  とエネルギー殻外 (off the energy shell) も含む演算子  $\hat{T}(E_k)$  を行列要素

$$\langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T} | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle = -\pi \delta(E_k - E_{k'}) \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T}(E_k) | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle = -\pi \delta(E_k - E_{k'}) \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{V} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \quad (74)$$

で定義する。これを T 行列 (T-matrix) と呼び、これを用いて定義された演算子  $\hat{S} = 1 + 2i\hat{T}$  の行列要素  $\langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{S} | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle$  を S 行列 (S-matrix) と呼ぶ。また、式 (73) より、エネルギー殻外も含む演算子  $\hat{T}(E_k)$  はリップマン・シュウインガー方程式

$$\hat{T}(E_k) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_k^{(+)} \hat{T}(E_k) \quad (75)$$

を満たす。

<sup>5</sup> $b_e$  は物理的には古典粒子の散乱問題の衝突パラメータに対応するものと考えられる [38]。

さて、式 (72) において、 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - r' \cos \theta$  ( $r \rightarrow \infty$ ) という近似式を用いると (ただし、 $\theta$  は  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  の間の角度)、この積分方程式は

$$u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{out}, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \sqrt{(2\pi)^3} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}') \right] \quad (76)$$

と書くことができ ( $\mathbf{k}' = k\mathbf{r}/r$ )、確かに境界条件 (65) を満たすことがわかる。また、式 (65) と式 (76) を比較して

$$F(\theta, \phi) = -(2\pi)^3 \frac{2m_r}{4\pi\hbar^2} \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{V} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \Big|_{E_k=E_{k'}} = -(2\pi)^3 \frac{2m_r}{4\pi\hbar^2} \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T}(E_k) | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle \Big|_{E_k=E_{k'}} \quad (77)$$

を得る。これより、低エネルギー極限  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  で、

$$\frac{4\pi\hbar^2}{2m_r} a = -(2\pi)^3 \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \langle u_{\mathbf{k}}^{(0)} | \hat{T}(E_k) | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle \quad (78)$$

という関係が成り立つ事がわかる。

また、散乱がポテンシャルの詳細によらない事がわかったので、粒子間の衝突がデルタ関数型有効接触相互作用

$$U(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{2m_r} \delta(\mathbf{r}) \quad (79)$$

によって引き起こされるとしても良いので、後にこの相互作用を用いる事がある。また、この有効相互作用は擬ポテンシャル法 (pseudo potential method) によっても導く事ができることを付記しておく [40]。

### 3.2 フェッシュバッハ共鳴

さて、ここまでは、冷却原子の内部自由度を無視して散乱過程を考えてきたが、我々は (擬) スピン自由度の存在に起因する物理にも (もちろん) 興味があるので、この自由度が存在する場合の散乱過程を考えよう。(擬) スピン自由度が存在する場合、散乱過程もこの自由度を考慮に入れなければならない。以下では、文献 [9, 35, 41, 42] に沿って、スピン自由度がどのように冷却原子の散乱過程をユニークなものにしているかを見てみよう。

スピン自由度が存在する場合、散乱する 2 つの原子間のポテンシャルはスピン状態に依存する。直感的には、閉殻の外の電子のスピン状態が異なる原子同士が散乱する場合、それらは同じ状態を占有する事ができ、これが引力になる。一方で、それらの状態が同じであれば、そうはならない。つまり、散乱する 2 粒子のスピン状態がスピン 1 重項 (spin singlet) かスピン 3 重項 (spin triplet) かでポテンシャルが大きく異なるのである [10, 37]。前者を  $\hat{V}_S$ 、後者を  $\hat{V}_T$  としよう (図 2)。これらのポテンシャルを考慮し、 $z$  軸方向への磁場  $\mathbf{B}_z = (0 \ 0 \ B)$  をかけた 2 体のハミルトニアン  $\hat{H}_2$  は

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_1^{(1)}(\mathbf{B}_z, \mathbf{0}) + \hat{H}_1^{(2)}(\mathbf{B}_z, \mathbf{0}) + \hat{V}_S(\hat{\mathbf{r}}^{(1)} - \hat{\mathbf{r}}^{(2)})\hat{\mathcal{P}}_S + \hat{V}_T(\hat{\mathbf{r}}^{(1)} - \hat{\mathbf{r}}^{(2)})\hat{\mathcal{P}}_T \quad (80)$$

と書ける。ただし、右辺の添字  $\cdot^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) は  $i$  番目の粒子を表し、 $\hat{\mathcal{P}}_S$  と  $\hat{\mathcal{P}}_T$  はそれぞれスピン 1 重項、スピン 3 重項への射影演算子

$$\hat{\mathcal{P}}_S = \frac{1}{4} - \frac{1}{\hbar^2} \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)}, \quad \hat{\mathcal{P}}_T = \frac{3}{4} + \frac{1}{\hbar^2} \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \quad (81)$$

である。

さて、座標を重心座標と相対座標に変換し、興味のある相対座標  $\hat{r}$  の部分だけを取り出すと、ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \hat{H}_{\text{rel},0} + \hat{H}_{\text{hf},Z} + \frac{1}{4} [\hat{V}_S(\hat{r}) + 3\hat{V}_T(\mathbf{r})] + \frac{1}{4\hbar^2} [\hat{V}_T(\hat{r}) - \hat{V}_S(\hat{r})] \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \quad (82)$$

$$\hat{H}_{\text{rel},0} = -\frac{\hat{p}^2}{2m_r} \quad (83)$$

$$\hat{H}_{\text{hf},Z} = \sum_{i=1}^2 [\hat{H}_{\text{hf}}^{(i)} + \hat{H}_Z^{(i)}(\mathbf{B}_z)] \quad (84)$$

となる。

ここで、 ${}^6\text{Li}$  を例にとって散乱の様子を考察しよう。実際の実験に則して、エネルギーの低い 2 状態  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  の散乱を考えよう。この 2 粒子の状態を  $|1,2\rangle$  と表そう。ハミルトニアン (82) は全スピンを保存するが、最後の項は電子スピンを入れ替える働きがある事に注意すると、このハミルトニアンの行列要素は  $|1,2\rangle$  だけで閉じず、一般には  $m_{F,\text{tot}} = m_F^{(1)} + m_F^{(2)} = 0$  を満たす状態間の遷移行列要素も存在する事がわかる。この例として  $|3,6\rangle = |3\rangle|6\rangle$  との遷移を考えてみると、

$$\frac{1}{\hbar^2} \langle 3,6 | \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} | 1,2 \rangle \neq 0 \quad (85)$$

となる。つまり、散乱は 1 つのチャンネル  $|1,2\rangle$  だけでは閉じず、他のチャンネル (この場合は  $|3,6\rangle$ ) の影響も受ける事がわかる。そこで、ここでは  $|1,2\rangle$  と  $|3,6\rangle$  で  $m_{F,\text{tot}} = 0$  の部分空間が張られていると仮定して、更なる考察を続けてみよう<sup>6</sup>。そのために、この部分空間での単位演算子をそれぞれの状態への射影演算子で分解したもの

$$\hat{1}_{m_{F,\text{tot}}=0} = |1,2\rangle\langle 1,2| + |3,6\rangle\langle 3,6| \quad (86)$$

を使って、この部分空間での  $\hat{H}_{\text{hf},Z}$  について考えよう。すると、

$$\hat{H}_{\text{hf},Z} = \hat{H}_{\text{hf},Z}(1,2) + \hat{H}_{\text{hf},Z}(3,6) \quad (87)$$

$$\hat{H}_{\text{hf},Z}(1,2) = E_{1,2}(B) |1,2\rangle\langle 1,2| \quad (88)$$

$$\hat{H}_{\text{hf},Z}(3,6) = E_{3,6}(B) |3,6\rangle\langle 3,6| \quad (89)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} E_{1,2}(B) &= -\frac{1}{2}a_{\text{hf}} - \frac{\mu}{I}B - \frac{1}{2}\sqrt{2a_{\text{hf}}^2 + \left[\frac{1}{2}a_{\text{hf}} + \left(g_e\mu_B + \frac{\mu}{I}\right)B\right]^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a_{\text{hf}}^2 + \left(g_e\mu_B + \frac{\mu}{I}\right)^2 B^2} \\ &\simeq -\left(g_e\mu_B + \frac{2\mu}{I}\right)B \quad (\langle\hat{\mu}_z\rangle B \gg a_{\text{hf}}) \end{aligned} \quad (90)$$

$$E_{3,6}(B) = 0 \quad (91)$$

である。つまり、各チャンネルのエネルギーごとに異なる磁場依存性が現れるのである。

<sup>6</sup>本来は、 $|3,6\rangle$  だけではなく、 $|1,4\rangle$ 、 $|2,5\rangle$ 、 $|4,5\rangle$  が  $m_{F,\text{tot}} = 0$  を満たすので、 $|1,2\rangle$  と結合する。

同様にして、各項を  $|1, 2\rangle$  と  $|3, 6\rangle$  で整理することができるが、ここから先は表記を少し一般的にして話を進めよう。具体的には、散乱を考える開チャンネル (open channel) を  $|P\rangle$  (先ほどまでの話では  $|1, 2\rangle$  に対応)、中間状態を考える閉チャンネル (closed channel)  $|Q\rangle$  (先ほどまでの話では  $|3, 6\rangle$  に対応<sup>7)</sup>) と書く事にしよう。開チャンネルと閉チャンネルを含む部分空間への射影演算子をそれぞれ  $\hat{P} = |P\rangle\langle P|$ 、 $\hat{Q} = |Q\rangle\langle Q|$  とすると、 $\hat{P} + \hat{Q} = \hat{1}$ 、 $\hat{P}\hat{Q} = 0$  を満たす。これらを用いて、状態ベクトル  $|\psi\rangle$  は  $|\psi_P\rangle = \hat{P}|\psi\rangle$ 、 $|\psi_Q\rangle = \hat{Q}|\psi\rangle$  によって  $|\psi\rangle = |\psi_P\rangle + |\psi_Q\rangle$  と書くことができる。上記の考察から、複数のチャンネルを含んだハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{rel}} &= (\hat{P} + \hat{Q})\hat{H}_{\text{rel}}(\hat{P} + \hat{Q}) \\ &= \hat{H}_{PP}|P\rangle\langle P| + \hat{H}_{QQ}|Q\rangle\langle Q| + \hat{H}_{PQ}|P\rangle\langle Q| + \hat{H}_{QP}|Q\rangle\langle P| \\ &= \begin{pmatrix} \hat{H}_{PP} & \hat{H}_{PQ} \\ \hat{H}_{QP} & \hat{H}_{QQ} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (92)$$

$$\hat{H}_{PP} = \hat{H}_{PP,0} + \hat{V}_{PP} = -\frac{\hat{p}^2}{2m_r} + \frac{1}{4} \left[ (1 - S_{PP})\hat{V}_S(\hat{r}) + (3 + S_{PP})\hat{V}_T(\hat{r}) \right] \quad (93)$$

$$\hat{H}_{QQ} = -\frac{\hat{p}^2}{2m_r} + \Delta E_{QP}(B) + \frac{1}{4} \left[ (1 - S_{QQ})\hat{V}_S(\hat{r}) + (3 + S_{QQ})\hat{V}_T(\hat{r}) \right] \quad (94)$$

$$\hat{H}_{PQ} = \frac{1}{4} \left[ \hat{V}_T(\hat{r}) - \hat{H}_S(\hat{r}) \right] S_{PQ} \quad (95)$$

$$\hat{H}_{QP} = \frac{1}{4} \left[ \hat{V}_T(\hat{r}) - \hat{H}_S(\hat{r}) \right] S_{QP} \quad (96)$$

となる。ただし、

$$S_{AB} = \frac{1}{\hbar^2} \langle A | \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} | B \rangle \quad (A, B = P, Q) \quad (97)$$

とし、式 (92) の行列表示はベクトル

$$\begin{pmatrix} |\psi_P\rangle \\ |\psi_Q\rangle \end{pmatrix} \quad (98)$$

に作用する表示を選んだ。また、 $r \rightarrow \infty$  における開チャンネルのポテンシャルの値が 0 となるようにエネルギーの原点を移し、

$$\Delta E_{QP}(B) = E_Q(B) - E_P(B) \quad (99)$$

とした。この表記を用いて、シュレーディンガー方程式を書き下すと、次の連立方程式が得られる。

$$(E - \hat{H}_{PP})|\psi_P\rangle = \hat{H}_{PQ}|\psi_Q\rangle \quad (100)$$

$$(E - \hat{H}_{QQ})|\psi_Q\rangle = \hat{H}_{QP}|\psi_P\rangle \quad (101)$$

式 (101) の外向き散乱波を表す形式解は

$$|\psi_Q\rangle = \left( E - \hat{H}_{QQ} + i\epsilon \right)^{-1} \hat{H}_{QP}|\psi_P\rangle \quad (102)$$

<sup>7</sup>脚注 6 でも述べたが、本来、 $|Q\rangle$  は  $|1, 4\rangle$ 、 $|2, 5\rangle$ 、 $|3, 6\rangle$ 、 $|4, 5\rangle$  が張る空間である。



となる。この形式解を式 (100) に代入すると、次式が得られる。

$$(E - \hat{H}_{\text{eff}})|\psi_P\rangle = 0 \quad (103)$$

ここで、

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{PP} + \hat{H}_{PQ} \frac{1}{E - \hat{H}_{QQ} + i\epsilon} \hat{H}_{QP} = \hat{H}_{PP,0} + \hat{V}_{PP} + \hat{V}'_{PP} \quad (104)$$

である。この式から、散乱状態  $|\psi_P\rangle$  は仮想的な中間状態を経ていることがわかる。

さて、ここからは、この有効ハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{eff}}$  と s 波散乱長との関係について考えよう。ハミルトニアン (104) は 2 種類の相互作用  $\hat{V}_{PP}$  と  $\hat{V}'_{PP}$  を持つが、このような問題は歪形波ボルン近似 (disturbed wave Born approximation) を用いて解く事ができる [38]。まず、 $\hat{H}_{PP}$  に対するリップマン・シュウインガー方程式

$$|\zeta_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = |u_{\mathbf{k}}^{(0)}\rangle + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - \hat{H}_{PP,0} \pm i\epsilon} \hat{V}_{PP} |\zeta_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle \quad (105)$$

を満たす  $\hat{H}_{PP}$  の散乱状態  $|\zeta_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$  がわかっているとしよう。なお、

$$|\zeta_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = |u_{\mathbf{k}}^{(0)}\rangle + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - \hat{H}_{PP} \pm i\epsilon} \hat{V}_{PP} |u_{\mathbf{k}}^{(0)}\rangle \quad (106)$$

が成立する。このとき、全ハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{eff}}$  の散乱状態固有関数の式

$$|u_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = \frac{\pm i\epsilon}{E_{\mathbf{k}} - \hat{H}_{PP} - \hat{V}'_{PP}} |u_{\mathbf{k}}^{(0)}\rangle \quad (107)$$

から歪形リップマン・シュウインガー方程式

$$|u_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle = |\zeta_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - \hat{H}_{PP} \pm i\epsilon} \hat{V}'_{PP} |u_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle \quad (108)$$

が得られる (詳しくは文献 [38] を参照)。

さて、ハミルトニアン  $\hat{H}_{\text{eff}}$  に対する T 行列は定義 (75) より

$$\langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T} | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle = -\pi\delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{V}_{PP} + \hat{V}'_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \quad (109)$$

となるが、ここで、右辺第 2 項について考えてみよう。式 (106) より

$$\langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{V}'_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle = \langle \zeta_{\mathbf{k}'}^{(-)} | \hat{V}'_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle - \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{V}_{PP} \frac{1}{E_{\mathbf{k}'} - \hat{H}_{PP} + i\epsilon} \hat{V}'_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \quad (110)$$

となるが、第 2 項の  $E_{\mathbf{k}'}$  は式 (109) のデルタ関数部分より  $E_{\mathbf{k}}$  としてよい。さらに、式 (108) を用いると、式 (109) は

$$\langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T} | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle = -\pi\delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) \left[ \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T}_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle + \langle \zeta_{\mathbf{k}'}^{(-)} | \hat{V}'_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \right] \quad (111)$$

$$\simeq -\pi\delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) \left[ \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | \hat{T}_{PP} | u_{\mathbf{k}}^{(0)} \rangle + \langle \zeta_{\mathbf{k}'}^{(-)} | \hat{V}'_{PP} | \zeta_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \right] \quad (112)$$

となる。ここで、 $\hat{T}_{PP}$  は  $\hat{V}'_{PP} = 0$  のときのエネルギー殻外も含む T 行列の演算子であり、最後の近似式は式 (108) の第 0 次の項を代入したものである (歪形波ボルン近似)。この結果より、Q チャンネルの束縛状態  $|\psi_n\rangle$  とそのエネルギー  $E_n$  を用いると、 $\mathbf{k} \rightarrow 0$  で、

$$\frac{4\pi\hbar^2}{2m_r}a = \frac{4\pi\hbar^2}{2m_r}a_{PP} - (2\pi)^3 \sum_n \frac{|\langle\psi_n|\hat{H}_{QP}|\zeta_0\rangle|^2}{E - E_n} \quad (113)$$

が得られる ( $a_{PP}$  は  $\hat{V}'_{PP} = 0$  の時の s 波散乱長)。ただし、 $\mathbf{k} \rightarrow 0$  の極限で、 $|\zeta_{\mathbf{k}}\rangle^{(\pm)}$  の差は無視できることを利用し、 $|\zeta_0\rangle = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} |\zeta_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle$  とした [10]。ここで、Q チャンネルの束縛状態のうち、今考えている磁場強度では  $E_{\text{res}}$  が  $E$  に近いとしよう。さらに、閉チャンネルのポテンシャルの原点は磁場に依存することを思い出すと、

$$E_{\text{res}} = \Delta E_{QP}(B) - \delta E_{\text{res}} \quad (114)$$

と書く事ができる (図 2 参照)。ここで、磁場が  $B = B_0$  の時に入射エネルギー  $E$  と共鳴エネルギー  $E_{\text{res}}$  が一致すると仮定すると、

$$E - E_{\text{res}} = -g_e\mu_B(B - B_0) \quad (115)$$

となる事がわかる。よって、式 (113) は

$$a = a_{\text{bg}} \left( 1 + \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \quad (116)$$

$$\Delta B = \frac{(2\pi)^3 2m_r}{4\pi\hbar^2 a_{\text{bg}}} \frac{|\langle\psi_n|\hat{H}_{QP}|\zeta_0\rangle|^2}{g_e\mu_B} \quad (117)$$

と近似できる (図 2 参照)。ただし、ここでは  $a_{PP}$  を通常用いられる表記  $a_{\text{bg}}$  に変えた。

$^6\text{Li}$  と  $^{40}\text{K}$  のフェッシュバツハ共鳴の各パラメータを表 2 に示す。ただし、 $^6\text{Li}$  の s 波散乱長に関するより正確な理解のためには開チャンネルの共鳴についても考える必要がある [43]。

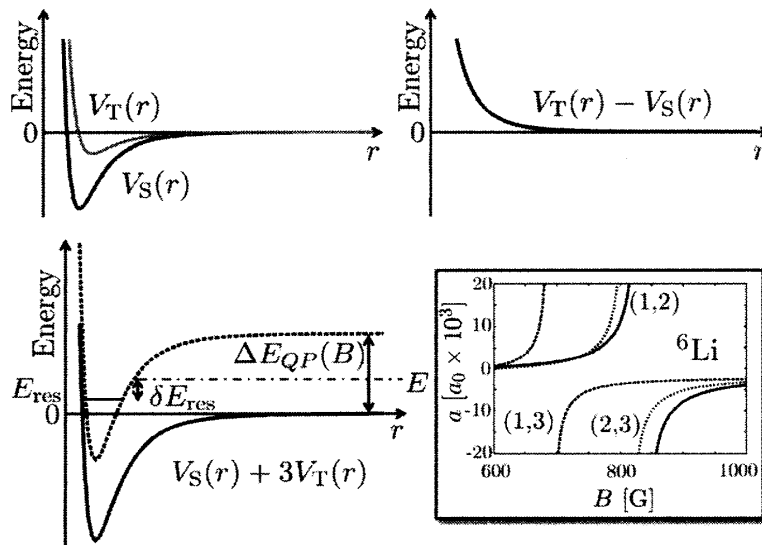


図 2: フェッシュバツハ共鳴

原子種	チャンネル	$a_{bg}/a_0$	$B_0$ [G]	$\Delta B$ [G]	文献
$^6\text{Li}$	(1,2)	-1405	834.149	300	[44]
	(1,3)	-1727	690.43	122.3	[44]
	(2,3)	-1490	811.22	222.3	[44]
	(1,2)	60*	543.25	0.1	[45]
$^{40}\text{K}$	(1,2)	174*	202.1	8.0*	[46]
	(1,3)	174	224.2	9.7	[47]

表 2:  $^6\text{Li}$  と  $^{40}\text{K}$  の s 波散乱長に対するフェッシュバッハ共鳴の各パラメータ。\* は文献 [33] による。

## 4 光格子系におけるハバード模型

さて、この章では光格子系におけるハバード模型について考えよう。後に見るように、光格子はまず調和型 (正確にはガウシアン型) の光トラップ・ポテンシャルで捕獲されたフェルミ原子気体に、断熱的に周期ポテンシャル (定在波) を入れていくという段階を経て作られる。

そこで、まず、絶対零度の場合に、次のような調和型の光トラップ・ポテンシャル  $V_{ho}(\mathbf{r})$  中のフェルミ原子気体について考察しよう。

$$V_{ho}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (118)$$

さて、このトラップ・ポテンシャル中のエネルギー準位は

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z \quad (119)$$

である。この系において、あるエネルギー  $\epsilon$  よりも小さいエネルギーを持つ状態の数  $G(\epsilon)$  を求めてみよう。 $\epsilon \gg \hbar\omega_{x,y,z}$  を満たす  $\epsilon$  の場合、スペクトルは連続で、ゼロ点運動は無視してよいので、連続変数  $\epsilon_{x,y,z} = \hbar\omega_{x,y,z}n_{x,y,z}$  を導入して  $G(\epsilon)$  を求める事を考える。すると、式 (119) の表面は  $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  の表面であるので、

$$G(\epsilon) = \frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3} \int_0^\epsilon d\epsilon_x \int_0^{\epsilon-\epsilon_x} d\epsilon_y \int_0^{\epsilon-\epsilon_x-\epsilon_y} d\epsilon_z = \frac{1}{6} \left(\frac{\epsilon}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \quad (120)$$

が得られる。今は絶対零度なので、フェルミ・エネルギー (Fermi energy)  $E_F$  と粒子数  $N$  に対して

$$G(E_F) = N \quad (121)$$

が得られる。以上の考察より、光トラップ系における重要なエネルギースケールであるフェルミ・エネルギー

$$E_F = k_B T_F = (6N)^{\frac{1}{3}} \hbar\bar{\omega} \quad (122)$$

が得られる ( $T_F$  はフェルミ温度)。より詳しい考察は [10, 48] などを参照されたい。

#### 4.1 周期ポテンシャルの影響

さて、次に、一旦トラップ・ポテンシャルを忘れて、周期ポテンシャルの影響について復習しよう。周期が  $\mathbf{R}$  である周期ポテンシャル中の波動関数はハミルトニアン  $\hat{H}$  の量子数  $n$  と、並進変換の量子数  $\mathbf{k}$  を用いて、

$$\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (123)$$

と書くことができる。ただし、 $u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  は

$$u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (124)$$

を満たす。この  $\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  はブロッホ (Bloch) の定理

$$\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (125)$$

を満たすことが確認できる。

この波動関数によって与えられるエネルギーはバンド構造を持つ事が知られており、もちろん、光格子中のフェルミ原子気体も (トラップ・ポテンシャルを無視すれば) 例外ではない。そこで、反跳エネルギー (62) で規格化した周期ポテンシャル強度  $\bar{V}_0 = V_0/E_r$  を変化させた図を見てみよう。まず、 $\bar{V}_0 \gg 1$  の場合には、周期ポテンシャルによる各サイトの閉じ込めが大変きつくなるために、波動関数がポテンシャルに寸断され、周期ポテンシャルのある谷間に局在する波動関数の成分とその隣の谷間に局在する波動関数の成分の間の相関が小さくなってくる。すると、周期ポテンシャルの谷間は調和型トラップ・ポテンシャルと考える事ができるようになり、実際、その場合のエネルギースペクトルと一致する。次に、 $\bar{V}_0$  を徐々に小さくしていくと、エネルギーが高いバンドから順にポテンシャルの感じ方が弱くなっていくため、平坦なバンド構造からずれを生じ始める。そして、最終的には  $\bar{V}_0 = 0$  で自由粒子のエネルギーの運動量依存性を折り畳んだ構造を示す (図 3)。

光格子系ではレーザー強度を断熱的に変化させる事により、実際に図 3 のようにバンド構造を変化させる事ができる。そして、これを利用して、バンドのフィリング (filling) を運動量空間にマップし、後に議論する飛行時間法 (time of flight method) を用いて実空間の像として CCD カメラで観測する事が可能である。この実験テクニックは “バンド・マッピング (band mapping)” と呼ばれ、様々な現象の観測に使われている。

次に、次式でワニエ関数 (Wannier function) を定義しよう。

$$w_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}}' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}}' e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i)} u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (126)$$

ここで、 $\sum'$  は第 1 ブリルアン・ゾーン (Brillouin zone) で和を取る事を表しており、 $\mathbf{R}_i$  はポテンシャルの  $i$  番目の底の位置を表しており、 $1/\sqrt{N}$  は規格化因子である。このワニエ関数を用いると、波動関数は

$$\psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} w_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (127)$$

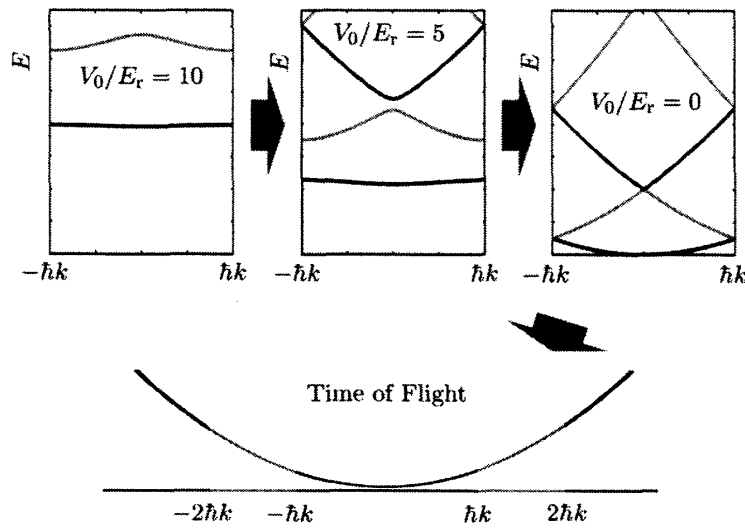


図 3: バンド・マッピング

と表す事ができる。

さて、このワニエ関数を用いて光格子系を記述する有効ハミルトニアンを導いてみよう。連続系のハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{kin}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (128)$$

$$\hat{H}_{\text{kin}} = \int d\mathbf{r} \left[ \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \{K + V_{\text{lat}}(\mathbf{r})\} \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) \right] \quad (129)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d\mathbf{r} \left[ g \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right] \quad (130)$$

$$K = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \quad (131)$$

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (132)$$

から始めよう。ただし、前に考察したように、低エネルギー散乱のみを考慮し、デルタ関数型原子間相互作用 (79) を採用した。場の演算子  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$  はフェルミオンの消滅演算子を用いて

$$\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) = \sum_{n,\mathbf{k}} \hat{C}_{\sigma,n,\mathbf{k}} \psi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{n,i} \hat{c}_{\sigma,n,i} w_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (133)$$

と表す事が出来る。ただし、

$$\hat{c}_{\sigma,n,i} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} \hat{C}_{\sigma,n,\mathbf{k}} \quad (134)$$

である。また、フェルミオンの生成消滅演算子はそれぞれ反交換関係

$$\{\hat{C}_{\sigma,n,\mathbf{k}}, \hat{C}_{\sigma',n',\mathbf{k}'}\} = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{n,n'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad \{\hat{c}_{\sigma,n,i}, \hat{c}_{\sigma',n',i'}\} = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{n,n'} \delta_{i,i'} \quad (135)$$

を満たす。ここで、最も下のバンド以外は考える物理にほとんど影響しないと仮定し、1 番目のバンドだけ考えよう。そのバンドのワニエ関数の添字を省略すると、場の演算子は

$$\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) \simeq \sum_i \hat{c}_{\sigma,i} w(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (136)$$

と近似できる。この近似を採用すると、ハミルトニアン (128) の各項は

$$\hat{H}_{\text{kin}} = \sum_{\sigma, i, j} J_{ij} \hat{c}_{\sigma, i}^{\dagger} \hat{c}_{\sigma, j} \quad (137)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = U \sum_i \hat{c}_{\uparrow, i}^{\dagger} \hat{c}_{\downarrow, i}^{\dagger} \hat{c}_{\downarrow, i} \hat{c}_{\uparrow, i} \quad (138)$$

$$J_{ij} = \int d^3r w(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) K w(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j) \quad (139)$$

$$U = \int d^3r w^4(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) \quad (140)$$

となる。このハミルトニアンは1バンド・ハバード模型と呼ばれる<sup>8</sup>。以降では隣よりも遠いサイトへのホッピングは無視できるとして、

$$\hat{H}_{\text{kin}} = J \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle} \hat{c}_{\sigma, i}^{\dagger} \hat{c}_{\sigma, j} \quad (141)$$

$$J = \int d^3r w(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) K w(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{i+1}) \quad (142)$$

とする。ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は再近接サイトのみを考慮に入れる記号とする。

光格子系では、このホッピング・パラメータ  $J$  は、 $V_0/E_r \gg 1$  の近似もとで1次元のマシュエ方程式から導いたもの [49, 9]

$$J = \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_r \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[ -2 \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (143)$$

を用いるか、バンド構造を求めてそれをフィッティングすれば不定性なく決める事ができる。一方、オンサイトの相互作用強度  $U$  は  $V_0/E_r$  が大きい場合に、ワニエ関数をガウシアンとして近似しても十分精度が良いので、

$$U = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k_L a E_r \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (144)$$

が良く用いられる [9]<sup>9</sup>。また、 $J$  と  $U$  では  $V_0/E_r$  に対する依存性がかなり違う事に注意しよう。

このように、光格子系では実験で用いるパラメータからほぼ不定性なくハバード模型のパラメータが決められる点が (量子シミュレーターという観点からは) 非常に優れた点であると言えよう。これにより、ハバード模型の相図を不定性なく求める事ができると期待されている。

## 4.2 調和型トラップ・ポテンシャルの影響

次に、周期ポテンシャルに調和型トラップ・ポテンシャルが加わった系について考えてみよう。

### ● 1 体系

まずは1体のフェルミ原子について考える。波動関数の広がりを見ると、調和型トラッ

<sup>8</sup>光格子系ではホッピング・パラメータを  $t$  ではなく、 $J$  と書く事が多いようである。

<sup>9</sup>もちろん、最局在ワニエ関数などを求めれば、より良い値が得られる [50]。また、文献 [51] の脚注2の式もよく用いられるようである。

プ・ポテンシャル中の波動関数のような振る舞いが期待できる。しかし、光格子ポテンシャルの存在により、波動関数の振る舞いは、高エネルギー側で劇的に変化するのである [52, 53]。

まず、低エネルギー側の波動関数の振る舞いを見てみよう。光格子ポテンシャルが十分に高い場合、低エネルギー側のエネルギー固有値は下記の有効角振動数  $\omega^*$  と有効質量  $m^*$  で記述される調和型トラップ・ポテンシャル中の自由粒子のスペクトルと一致する [53]。

$$\omega^* = \omega \sqrt{\frac{m}{m^*}}, \quad m^* = \frac{\hbar^2}{2Ja} \quad (145)$$

これは、格子系の立場から見たとき、ブロッホ・バンドの低エネルギーの分散関係が有効質量  $m^*$  を持つ自由粒子と同一である事に対応している。

次に、高エネルギー側を見てみよう。調和型トラップ・ポテンシャル中の波動関数はエネルギーに比例して空間的な振動が激しくなり、節 (node) が増えていくが、その振動の周期は空間的に一様ではない。大雑把に表すならば、波動関数は、トラップ・ポテンシャルの中心付近では短い波長で振動し、端の方では長い波長で振動する。調和型トラップ・ポテンシャルしか存在しない場合は、この振る舞いがどのエネルギー準位でも見る事ができる。しかし、光格子ポテンシャルが存在する場合、あるエネルギーでトラップ・ポテンシャルの中心付近での波長が格子間隔と同じくらいになり、ブラッグ反射 (Bragg reflection) が起こるのである。その結果、波動関数はトラップ・ポテンシャルとブラッグ反射によりトラップ・ポテンシャルの中心から外れたところで局在する事になる [52, 53]。また、この振る舞いにより、状態密度にも変化があらわれ、トラップ・ポテンシャルの強さを 0 にした極限における状態密度は一様系の状態密度と異なる事が指摘されている [52, 54]。

#### ● 多体系

次に、多体の場合について考えてみよう。まず、トラップ・ポテンシャルの存在により、フィリングが位置に依存することになる。これがこの系の最大の特徴の 1 つである。ハバード模型はフィリングによって現れる相が異なる事があるため、光格子系の基底状態は相共存する事がある。この典型例であるモット (Mott) 絶縁相と金属相の共存についてみてみよう。

ここでは簡単のために 1 次元系を考えよう [55, 56]。光格子系におけるハバード模型のハミルトニアンは、調和型トラップ・ポテンシャルを考慮して

$$\hat{H} = \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle} J \hat{c}_{\sigma, i}^\dagger \hat{c}_{\sigma, j} + \sum_{\sigma, i} V_{\text{trap}} (x_i - x_c)^2 \hat{c}_{\sigma, i}^\dagger \hat{c}_{\sigma, i} + \sum_i U \hat{c}_{\uparrow, i}^\dagger \hat{c}_{\downarrow, i}^\dagger \hat{c}_{\downarrow, i} \hat{c}_{\uparrow, i} \quad (146)$$

と書ける。ここで、 $J$  はホッピング・パラメータ、 $V_{\text{trap}}$ 、 $x_c$  はそれぞれトラップ・ポテンシャルの強さと中心位置、 $x_i = ia_L$  で  $a_L = \lambda_L/2$  は格子間隔、 $U$  は相互作用の強さを表す。

図 4 はトラップ・ポテンシャルの強さ  $V_{\text{trap}} a_L^2/J$  を固定して、相互作用の強さ  $U/J$  を変化させた際の粒子数密度分布  $n_i$  を示したものである。この図を見ると、 $U/J$  が小さい時にはトラップ効果が強く効いており、 $U/J$  を徐々に大きくしていくと全体が金属相のまま粒子数密度分布が広がっていく事が見て取れる。ところが、 $U/J \geq 5$  になると劇的な変化が訪れる。トラップ・ポテンシャルの真ん中を中心にして、 $n_i = 1$  の領域が広がり始めるのであ

る。この部分はモット台地 (Mott plateau) と呼ばれるモット絶縁相である。図をよく見ると、 $U/J = 5, 6$  の場合にはモット台地を挟むようにして  $n_i < 1$  の金属相が存在する事がわかる。これが光格子系に特徴的な、トラップ・ポテンシャルに起因するフィリングの変化による相共存した基底状態の典型的な例である [55, 56]。この計算は 1 次元絶対零度であるが、後に紹介するように、この相共存構造は 3 次元有限温度系で観測された [57, 58]。

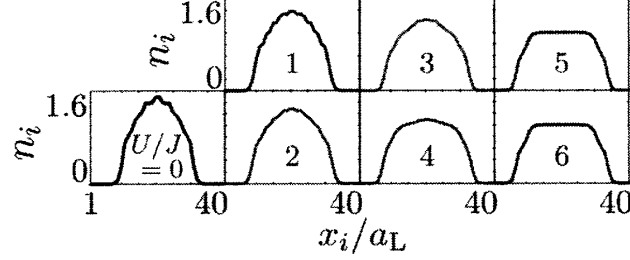


図 4: モット絶縁相と金属相の共存。系の大きさ  $L = 40$  サイト、粒子数  $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 12$ 、トラップ・ポテンシャルの強さ  $V_{\text{trap}} a_L^2 / J = 2.63 \times 10^{-3}$  と中心  $x_c / a_L = 20.5$ 。

## 5 観測方法

ここでは、フェルミ原子光格子系における観測方法について述べる。なお、\* 印がついているものは、現時点ではフェルミ原子光格子系で使用されていない方法であるが、将来使用される可能性のある観測方法である。

### ● 飛行時間法 (time of flight method)

まず、中性原子気体における最も標準的な観測方法である飛行時間法について述べる。基本的な手順は、次のようなものである。

1. 閉じ込められている原子気体をトラップ・ポテンシャルから解放する。すると、原子は元々持っていた運動量によって広がりながら落下する。
2. 十分に広がったら、電子の準位に共鳴する周波数のレーザーを落ちてくる原子気体に当てる。
3. すると、原子が光を吸収した部分の影ができるので、その影を CCD カメラで記録する。

ここで、後の位相差画像化法との比較のために、最後の CCD カメラで撮影する部分について少しだけ詳しく考察しよう。飛行時間法では、図 5(a) のように各機器を設置する。ここで、 $E_0$  を非散乱光の振幅、 $\Delta E$  を原子気体による散乱光の振幅とすると、共鳴光が原子に散乱された後の全体の電場の振幅  $E$  は

$$E = E_0 + \Delta E = \bar{T} E_0 e^{i\phi} \quad (147)$$

と表すことができる。ここで、透過係数  $\bar{T}$ 、位相シフト  $\phi$  は、柱状密度  $n_{\text{col}}$ 、共鳴散乱断面積  $\sigma_0$ 、離調  $\delta$  を用いて

$$\bar{T} = \exp \left[ -\frac{n_{\text{col}} \sigma_0}{2} \frac{1}{1 + \delta^2} \right], \quad \phi = -\frac{n_{\text{col}} \sigma_0}{2} \frac{\delta}{1 + \delta^2} \quad (148)$$



と書ける [27]。図 5(a) の実験設定から、スクリーンにあたるレーザーの強度  $I_{\text{ToF}}$  は

$$I_{\text{ToF}} \propto |E|^2 = \bar{T}^2 \quad (149)$$

となる。このようにして、広がった原子雲が作る影を CCD カメラで撮影する事によって、トラップ・ポテンシャル内で原子気体が持っていた運動量分布を観測する事ができるのである。なお、CCD で観測する直前の粒子分布  $\langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{X}) \rangle_{\text{exp}}$  と、トラップ・ポテンシャル内の運動量分布  $\langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle_{\text{trap}}$  の関係は

$$\langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{X}) \rangle_{\text{exp}} \simeq \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle_{\text{trap}} = \frac{1}{W^d} \sum_{i,j} e^{i(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{k}} \langle \hat{c}_{\sigma,i} \hat{c}_{\sigma,j}^\dagger \rangle_{\text{trap}} \quad (150)$$

と表される。ここで、 $d$  は次元、 $\mathbf{X}$  は広がった後の位置を表し、 $W = \hbar t / w_0 m$  は時間  $t$  だけ落下して広がったワニエ関数の幅である ( $w_0$  はトラップ・ポテンシャル内でのワニエ関数の幅)。また、トラップ・ポテンシャルを切った後は弾道的に原子が飛んでいると仮定すると、トラップ・ポテンシャル内の擬運動量  $\mathbf{k}$  は  $\mathbf{k} = m\mathbf{X} / \hbar t$  と表される。

ここで、原子気体は 3 次元に広がっているが、この観測方法は 1 方向からレーザーを当て、その影を撮影しているため、CCD に垂直な方向の粒子数が積分された柱状密度 (column density)

$$n_{\text{CCD},\sigma}(X, Y) = \int dZ \langle \hat{n}_\sigma(X, Y, Z) \rangle_{\text{exp}} \quad (151)$$

が観測量だということに注意しよう。

フェッシュバハ共鳴と組み合わせて反強磁性状態を観測する方法も提案されている [59]。

#### ● ノイズ相関

次に、ショット・ノイズをうまく利用して、2 体の相関を測る方法を紹介しよう [60]。

2 体の相関関数  $\mathcal{G}_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$  は

$$\mathcal{G}_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{X}) \hat{n}_{\sigma'}(\mathbf{X}') \rangle_{\text{exp}} - \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{X}) \rangle_{\text{exp}} \langle \hat{n}_{\sigma'}(\mathbf{X}') \rangle_{\text{exp}} \quad (152)$$

$$\simeq \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{k}) \hat{n}_{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle_{\text{trap}} - \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle_{\text{trap}} \langle \hat{n}_{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle_{\text{trap}} \quad (153)$$

$$\simeq \frac{1}{W^{2d}} \sum_{i,i',j,j'} e^{i(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i'}) \cdot \mathbf{k} + (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j'}) \cdot \mathbf{k}'} \langle \hat{c}_{\sigma,i}^\dagger \hat{c}_{\sigma',j}^\dagger \hat{c}_{\sigma',j'} \hat{c}_{\sigma,i} \rangle_{\text{trap}} \\ + \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{X}) \rangle_{\text{exp}} - \langle \hat{n}_\sigma(\mathbf{X}) \rangle_{\text{exp}} \langle \hat{n}_{\sigma'}(\mathbf{X}') \rangle_{\text{exp}} \quad (154)$$

となる。この式が意味するところは、1 回の飛行時間法で得られた実験データから相関と粒子密度を読み取り、それを多数回繰り返す事して期待値を求める事によって、トラップ・ポテンシャル内の相関関数が得られるということである。また、ハーフ・フィリングの場合は

$$\mathcal{G}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = -\frac{1}{2} \frac{N}{W^d} \left( \frac{2\pi w_0}{a_L} \right)^2 \sum_{\mathbf{G}} \delta \left( \mathbf{X} - \mathbf{X}' + \frac{\hbar t}{m} \mathbf{G} \right) - 2 \sum_{i,j} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} \langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle_{\text{trap}} \quad (155)$$

となり、スピン相関を測る事ができる。

この方法により、光格子フェルミ原子系において、フェルミオンのアンチ・バンチングが

観測されている [61]。また、光格子が入っていない中性原子フェルミ気体系では、ペアリングの相関 [62] や、局所的なフェルミオンのアンチ・バンチング [63] が観測されている。

また、この方法は、フェルミ原子光格子系の様々な相を同定するために利用できると期待されている [64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72]。

- 位相差画像化法 (phase contrast imaging method)

中性原子系では、トラップ・ポテンシャル中の原子気体の密度分布を直接観測する位相差画像化法という方法も良く用いられる。この方法は、原子気体にレーザーを当てて CCD で観測するのであるが、飛行時間法と異なるのは、トラップ・ポテンシャル中の原子に非共鳴光の散乱による位相差を画像化していることである。以下で簡単に原理を説明しよう (詳しくは文献 [27] を参照)。

位相差画像化法では位相を  $\pi/2$  だけ変える位相板、レンズ、スクリーンを図 5(b) のように設置する。ここで、飛行時間法の時の考察と同様に、 $E_0$  を非散乱光の振幅、 $\Delta E$  を原子気体による散乱光の振幅とすると、図 5(b) の実験設定から、スクリーンにあたるレーザーの強度  $I_{\text{PCI}}$  は位相板によって

$$I_{\text{PCI}} \propto \left| \Delta E + E_0 e^{i\frac{\pi}{2}} \right|^2 = |E_0|^2 \left[ \bar{T}^2 + 2 - 2\sqrt{2}\bar{T} \cos\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (156)$$

となる。ここで離調  $\delta$  を十分大きく取ると、 $\phi$  は小さくなるので、

$$I_{\text{PCI}} \simeq |E_0|^2 (\bar{T}^2 + 2 - 2\bar{T} + 2\bar{T}\phi) = |E_0|^2 \left( \bar{T}^2 + 2 - 2\bar{T} - \frac{\bar{T}\sigma_0\delta}{1+\delta^2} n_{\text{col}} \right) \quad (157)$$

が成り立つ。この結果より、位相差によって柱状密度  $n_{\text{col}}$  を観測できる事がわる。また、この方法は飛行時間法と異なり、トラップ・ポテンシャルから原子を解放したり、原子に光を吸収させたりしないので、粒子密度分布を非破壊的に観測する事が可能である。この特徴を活かし、非平衡過程の観測などにも用いる事が可能である。この特徴から“その場観察法 (*in situ* imaging method)”とも呼ばれる。なお、この方法は、離調をうまく調節する事により、アップ・スピンとダウン・スピンの差を観測する事も可能である [73]。

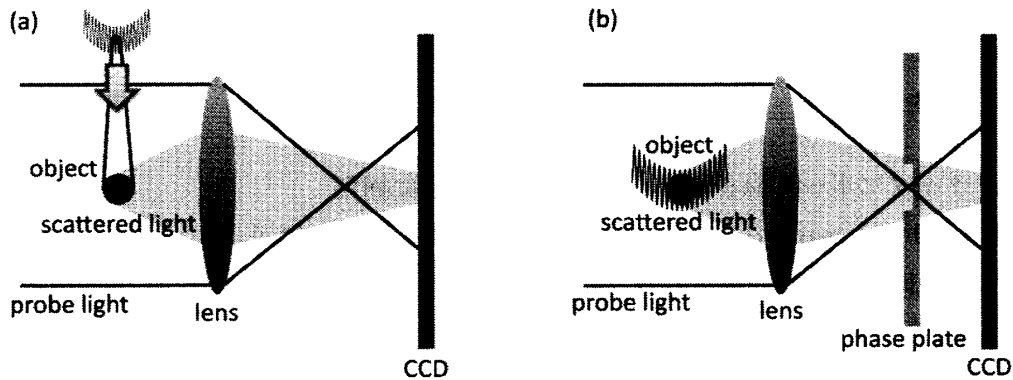


図 5: (a) 飛行時間法、(b) 位相差画像化法

- 格子振動による線形応答

式 (58)、(61) で見たように、光格子系ではレーザー強度によって格子の高さを制御でき

るため、これを時間的に変化させる事もできる。これを利用して、線形応答を実行し、超流動状態のペアリングのエネルギーやモット絶縁相での相互作用の大きさ [74]、スピン相関 [74, 75] やカレントの自己相関関数 [76] の測定を行う事が提案されている。

- ラジオ波分光 (rf spectroscopy)\*

第 2.3 章でラジオ波を使って 2 つの状態間を遷移させることが可能であることをみたが、さらに、そのうちの 1 つの状態から新たに 3 つ目の状態への遷移を考える事によって 1 粒子スペクトル関数を測る事ができる (角度積分型 [77, 78]、角度分解型 [79, 80])。これは、個体系で行われる光電子分光 (angle-resolved photoemission spectroscopy, ARPES)[81] に対応するもので、光格子なしのフェルミ原子系では擬ギャップが観測されており [80]、理論的解析も行われている [82, 83]。

- ブラッグ分光 (Bragg spectroscopy)\*

ブラッグ分光によって静的・動的構造因子 (static, dynamic structure factor)[11] を測定する事ができる [84]。

- 高分解能蛍光顕微鏡による観測 \*

高分解能蛍光顕微鏡により、ボース原子光格子系における 1 サイトごとの原子の振る舞いを観測する事が可能になった [85, 86]。日本語の解説 [87] も参照のこと。

## 6 光格子系実験

この章では光格子系の実験について述べる。まず最初に実験でどのように光格子が作られるかを概観し、次に、フェルミ原子光格子系でこれまで得られている実験結果を紹介する。そして、最後にまだフェルミ原子光格子系での実験は行われていないが、関連の深い実験結果や理論的考察をいくつか紹介する。

### 6.1 実験の流れ

これまでの章で、フェルミ原子気体を捕捉、冷却し、光格子を入れるための基礎的な知識がそろったので、フェルミ面を観測した実験 [88] を例に、実験の手順を見ていこう (詳しい冷却の手順などは [27] などを参照)。

- 磁気トラップにボース原子とフェルミ原子を同時に捕獲

共同冷却 (sympathetic cooling) をするために、ボース原子 (例:  $^{87}\text{Rb}$ ) とフェルミ原子 (例:  $^{40}\text{K}$ ) を同時に磁気光学トラップに入れる。ボース原子、フェルミ原子は求弱場状態 (例: それぞれ  $|F=2, m_F=2\rangle$  と  $|F=9/2, m_F=9/2\rangle$ ) に用意しておく。

- ボース原子について蒸発冷却 (evaporative cooling) を行う。 ( $1\mu\text{K}$ ,  $T/T_F \simeq 0.3$ )

空間に不均一に分布している磁場のために、ラジオ波の共鳴角振動数が空間の各点で異なる。これを利用して、トラップ・ポテンシャルの中心から離れたところにいる、エネルギーの高い原子に求弱場状態から求強場状態の間の共鳴角振動数を狙ってラジオ波を当てる。その

結果、高いエネルギーを持った原子を選択的にトラップ・ポテンシャルから追い出す事ができる。その後は原子間相互作用により熱平衡状態への緩和が起こり、系の温度が下がる (蒸発冷却)。共同冷却はこれを利用し、ボース原子の温度を下げ、ボース原子集団をフェルミ原子の冷却剤として扱い、ボソン-フェルミオン間の相互作用を介してフェルミオンを冷やす。冷えたら再びラジオ波を当ててボース原子の状態を遷移させ、トラップ・ポテンシャルからボース原子を全て追い出す。

- 光トラップへ移行 ( $50 \sim 200 \text{ nK}$ ,  $T/T_F \simeq 0.2 \sim 0.05$ )

次に、フェッシュバハ共鳴を利用するために、光トラップにフェルミ原子を移す<sup>10</sup>。その後、ラジオ波を当てて、2つの擬スピン状態を混在させる (例:  $|F = 9/2, m_F = -9/2\rangle$  と  $|F = 9/2, m_F = -7/2\rangle$ <sup>11</sup>)。そして、光トラップを浅くしていく事で、高いエネルギーを持つフェルミ原子をトラップから追い出し、相互作用による緩和によって系の温度を下げる。

- 光格子系の完成 ( $T/T_F \simeq ?$ )

最後に定在波を断熱的に入れていき、光格子系が完成する。

- 観測

## 6.2 様々な光格子

光格子系では、レーザーの設置の仕方などを工夫する事により、様々な格子系を作る事ができる。以下でその例を見てみよう。

- 1次元・2次元格子列

3次元格子 [89] を構成するレーザーのうち、1方向のレーザーの強度を強くすることによって、その方向のホッピングを無視できるほど小さくすれば2次元格子系の層が重なった系ができる [90, 91]。また、同様にして、2方向のレーザー強度を強くすれば1次元格子列を作る事ができる [92, 90]。

- リング格子

リング型の光格子も実現しており [93]、それを回転させる事もできる [93, 94]。

- 超格子

波長の違うレーザーを同じ方向に2本入れる事により、超格子が実現している [95, 96, 97] (粒子はボース原子)。これを利用すれば、梯子格子、プラケット格子、チェッカーボード格子も作成可能である。また、偏光を利用したプラケット格子も実現されている [98]。

- 三角格子、ハニカム格子

3本のレーザーを  $120^\circ$  の角度で交わらせることにより三角格子が実現している [99, 100]。特に、文献 [100] の実験では、ボース原子を用いた実験であるが、三角格子上の基底状態が求まった。また、偏光をかえる事によりハニカム格子が実現している [99, 101]。

<sup>10</sup> これにより、求弱場状態を利用できるようになる。

<sup>11</sup> 両者とも求弱場状態であるので、光トラップである事が必要。

- カゴメ格子

同様に、3本のレーザーによるカゴメ格子も提案されている [102]。

- リーブ格子

平坦バンド強磁性を実現するためのリーブ格子 (Lieb lattice) が提案されている [103, 104, 105]。この格子を実現するためには最低でも5本のレーザーが必要である。

- 不規則格子

斑点レーザー (speckle laser) を用いる事により、光格子ポテンシャル、調和型トラップ・ポテンシャルに、不規則ポテンシャルを加える事ができる [106] (ただし、粒子はボース原子。ボース系のアンダーソン局在については [107, 108, 109] を参照)。ただし、斑点ポテンシャルはいくつかの格子点にまたがるスケールで変化しており、また、周期ポテンシャルの振幅を変化させるために、ホッピングだけでなく、相互作用の強さも同時に変えてしまう事に注意。これに関連して、斑点レーザーを加えたフェルミ原子光格子系の、動的平均場理論を用いた解析も行われている [110]。

- ホログラフィック光格子

ホログラフ位相板 [111, 112] やマイクロレンズ列 [113] を用いた光格子も実現している。これらの技術を用いれば、より自由な形状の光格子を実現する事ができると期待される。

- スピン依存光格子

本稿ではレーザーが直線偏光している場合を取り上げているが、円偏光したレーザーを用いて (擬) スピン依存した光格子系が実現している [114]。この光格子系でのハバード模型が考えられており [115]、さらに、モット相で実現するであろうスピン模型の交換相互作用の制御も提案されている [149]。

- 回転光格子

光格子を回転させ、ボース原子光格子系において、渦のピンニング [117] や渦の生成に成功している [118]。

### 6.3 フェルミ原子光格子系の主な実験結果

この章ではこれまでに行われた中性フェルミ原子気体系での代表的な実験結果を列挙する。

- フェルミ縮退

フェルミ縮退は  $^{40}\text{K}$  (1999年) [119]、 $^6\text{Li}$  (2001年) [120]、 $^3\text{He}$  (2006年) [121]、 $^{171}\text{Yb}$ 、 $^{173}\text{Yb}$  (2007年) [122]、 $^{87}\text{Sr}$  (2010年) [123] という多数の原子種で実現している。

- フェルミ面の観測

2005年にETHのグループにより3次元光格子系において、フェルミ面が観測された [88]。ここでは、第4.1章で紹介したバンド・マッピングのテクニックが使われ、 $V_0/E_F$  を大きくしていくと、飛行時間法で撮影された粒子分布  $\langle \hat{n}(\mathbf{X}) \rangle_{\text{CCD}}$  が徐々に四角くなっていき、バンド絶縁体に到達すると1辺の長さが  $2\hbar k$  の正方形になるのが確認されている。

## ● 波束の重心運動

光格子系は調和型トラップ・ポテンシャルのために系が一様でないので、輸送問題を考える場合は波束の重心運動を扱う場合が多い。また、重力の影響を利用して輸送現象を観測する事もできる。

### － 相互作用なし

スピン偏極したフェルミ原子 (スピンレス・フェルミ原子) の 1 次元光格子系において、重力の影響によってブロッホ振動が起こる事が観測された [124]。また、同じくスピン偏極したフェルミ原子の 1 次元光格子系において、調和型トラップ・ポテンシャルの中心を急激にずらすことによって波束の重心運動を引き起こした。その結果、極端に重心運動が抑制する事がわかった [125, 126]。これは、先に論じた調和型トラップによって引き起こされる局在状態 [52, 53] に多くのフェルミ原子が入ってしまったために起こった現象であるが、古典的な解析でも理解する事ができる [126, 127, 128]。また、量子論的なシミュレーションによる解析も行われている [54, 53]。

### － ボース原子との相互作用あり

スピン偏極したフェルミオンと同時にボース原子を捕捉した系で同様の実験が行われたが、この場合にはボース原子との相互作用によって、局在状態から振動状態への遷移が引き起こされ、減衰振動もしくは過減衰することが観測された [129]。また、この現象に関する理論的解析も行われている [130, 131]。

### － フェルミ原子間の相互作用あり

その後、3 次元光格子系において、2 成分フェルミ原子が引力相互作用する場合に、トラップ・ポテンシャルの中心を急激にずらす実験が行われた [132]。この実験では  $U/J$  を調整し、減衰振動領域から過減衰領域までを制御する事に成功している。

## ● 超流動

フェッシュバハ共鳴を用いて、共鳴点付近での超流動-絶縁体転移が観測された [133]。しかし、相互作用が非常に強い領域なので、複数バンドのハバード模型による記述が妥当であると指摘されている [134]。

## ● モット絶縁体

2008 年に ETH のグループ [57] と、同時期に、マインツのグループ [58] によってモット絶縁相と金属相の共存状態が観測された。これらの実験では、圧縮率の測定 [57]、格子振動による線形応答 [57]、位相差画像化法 [57] による粒子数分布の確認によりモット絶縁体の生成が確認された。

## ● ダブロン崩壊

その後、二重占有状態 (ダブロン (doublon)) を作り出し、その崩壊のダイナミクスが観測された [135, 136]。この現象はダイアグラムの再加算法を用いて解析された [136]。

## ● 引力フェルミ原子の異常膨張

3次元引力フェルミ原子光格子系において、フェッシュバッハ共鳴を用いて相互作用の強さを変えていった場合の、引力相互作用の強さの極大点と原子集団の大きさの極小点のずれが観測された [137]。

- 高い対称性を持ったハバード模型

Yb系で  $SU(2) \times SU(6)$  という高い対称性を持ったハバード模型が実現した [138]。

- 格子振動線形応答による再近接スピン相関の観測

格子振動線形応答により、隣のサイトとのスピン相関が測られ、理論計算の結果と良い一致を見た [139]。

## 6.4 その他

- バンド制御

本稿では最もエネルギーの低いバンドに限って定式化を進めてきたが、最近、ボース原子光格子系では、pバンド [140, 141] やfバンド [142] に選択的に粒子を用意する事ができるようになった。

- 仮想的な外場との相互作用

ボース原子系では、中性原子に結合する仮想的な磁場 [143, 144] と仮想的な電場 (ゲージ場) [145] が実現しており、スピン-軌道相互作用も実現している [146]。文献 [147] も参照。

- ハバード模型以外の格子模型について

フェルミ原子光格子系では、ハバード模型の他に、 $t$ - $J$  模型も提案されている [148, 149]。また、スピン・インバランス系におけるモット台地で磁場中のハイゼンベルグ模型 (Heisenberg model) が実現することが予測されている [150]。

- 磁性について

光格子が入っていない系でストナー不安定生 (Stoner instability) が観測されたという報告があったが [151]、その後の解析でペアリングの不安定生との競合が論じられている [152]。また、ボース原子光格子系では光超格子中で超交換相互作用 (superexchange interaction) が観測され、磁場中の反強磁性イジング鎖 (antiferromagnetic Ising chain) が実現している [153]。一方、フェルミ原子光格子系での反強磁性 [154, 155]、長岡強磁性 [156]、有限ホール密度長岡強磁性 [157]、フラット・バンド強磁性 [158, 159, 160]、三角格子系に特徴的なスピン配置 [161] の実現方法が論じられている。

- 超流動について

フェルミ原子光格子系における超流動転移についても多くの理論的研究がなされている [162, 67, 163]。また、フェルミ原子光格子系の制御性の高さを活かした引力系から斥力系を調べるアプローチも提案されている [164, 165, 166]。フェルミ原子光格子系における FFLO 状態 (Fulde-Ferrel-Larkin-Ovchinnikov state) については文献 [167] を参照。

- 温度、冷却法について

今、フェルミ原子光格子実験の一番の壁が“温度”である。磁性や超流動などの興味深い物理を見るためにはさらに温度を下げる必要があるが、そのためには新たな冷却方法が必要であると考えられている。フェルミ原子光格子系の温度の測定方法や、更なる冷却のための新手法に関しては文献 [15] とその引用文献を参照していただきたい。

## 7 まとめ

本稿では、現在発展中のフェルミ原子光格子系についての制御の基礎部分を解説し、実験の現状と理論の進展について触れた。フェルミ原子光格子系は現在も実験・理論共に急速に発展し続けているが、なんと言ってもさらに温度を下げるブレークスルーが待ち望まれている。磁性や超流動の転移温度以下に下がったとき、我々はフェルミ原子光格子系からどのような知見を得るのか、楽しみである。

## 補遺

第 2.4 章、式 (48) を導く際に用いた近似について解説する [23]。そこで用いる時間  $\tau$  だけかけて電場を入れる関数  $f(t)$  の概形を図 6 に示す。

第 2.4 章、式 (48) を導く際には、電場をかける時間  $t$ 、 $f(t)$  を特徴付ける時間スケール  $\tau$ 、電場と系の特徴的時間スケール  $1/(\omega_0 \pm \omega)$  の間に  $t \gg \tau \gg 1/(\omega_0 \pm \omega)$  が成り立つ事を仮定した。つまり、電場は 2 準位系の共鳴周波数から遠い周波数を用いて長い時間照射するという仮定である。これは実験状況から十分に良い近似で成り立っていると考えてよい。この仮定を用いると、

$$\int_0^t dt' \frac{dA}{dt'}(t') f(t') = A(t) f(t) + \int_0^t dt' A(t') \frac{df}{dt'}(t') \simeq A(t) f(t) \simeq A(t) \quad (158)$$

が得られる。

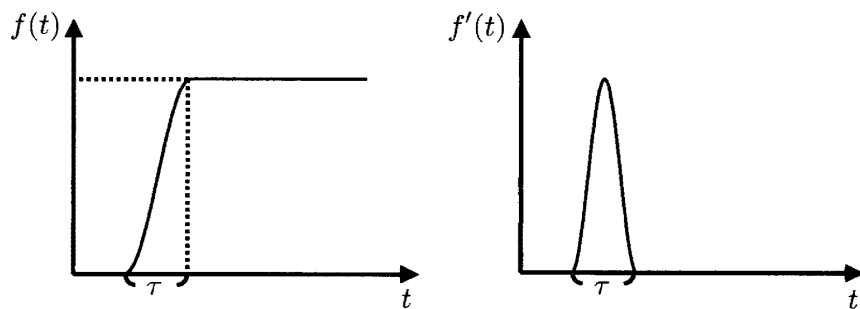


図 6: 関数  $f(t)$  とその微分

## 謝辞

本稿は普段議論していただいている方々による情報が多く含まれております。この場を借りて、青木秀夫氏、五十嵐亮氏、小林恵太氏、田家慎太郎氏、高橋義朗氏、段下一平氏、町田昌彦氏、山本篤史氏、山崎歴舟氏、柚木清司氏に感謝いたします。また、本稿の執筆の機会を与えてくださった水島健氏に感謝いたします。



## 参考文献

- [1] J. Hubbard, “Electron correlation in narrow energy bands”, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **276**, 238–257 (1963); *ibid.* **277**, 237–259 (1964).
- [2] 佐宗哲郎著, “強相関電子系の物理”, 日本評論社, 2009 年.
- [3] 斯波弘行著, “電子相関の物理”, 岩波書店, 2001 年.
- [4] 青木秀夫, 草部 浩一著, “強磁性”, 東京大学出版会, 1998 年; 黒木和彦, 青木秀夫著, “超伝導”, 東京大学出版会, 1999 年; 青木秀夫, 中島龍也著, “分数量子ホール効果”, 東京大学出版会, 1999 年.
- [5] D. Scalapino, “Numerical Studies of the 2D Hubbard Model”, in “Handbook of High-Temperature Superconductivity: Theory and Experiment”, ed. J.R. Schrieffer, J.S. Brooks (Springer-Verlag, 2007).
- [6] R.P. Feynman, “Simulating physics with computers”, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467–488 (1982).
- [7] S. Lloyd, “Universal Quantum Simulators”, *Science* **273**, 1073–1078 (1996); “Universal Quantum Simulators: Correction”, *ibid* **279**, 1113–1117 (1998).
- [8] I. Buluta and F. Nori, “Quantum Simulators”, *Science* **326**, 108–111 (2009).
- [9] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885–964 (2008).
- [10] ペシィック, スミス著, 町田一成訳, “ボーズ・アインシュタイン凝縮”, 吉岡書店, 2005 年; C.J. Pethick and H. Smith, “Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases” (Cambridge University Press, New York, 2008).
- [11] L.P. Pitaevskii and S. Stringari, “Bose–Einstein Condensation” (Oxford University Press, New York, 2003).
- [12] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Theory of ultracold atomic Fermi gases”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215–1274 (2008).
- [13] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463–512 (1999).
- [14] 素川靖司, 高橋義朗, “光格子を用いた量子シミュレーション”, *応用物理* **79**, 140–144 (2010).
- [15] D.C. McKay and B. DeMarco, “Cooling in strongly correlated optical lattices: prospects and challenges”, *Rep. Prog. Phys.* **74**, 054401 (2011).
- [16] T. Esslinger, “Fermi–Hubbard Physics with Atoms in an Optical Lattice”, *Annual Review of Condensed Matter Physics* **1**, 129–152 (2010).
- [17] A. Georges, “Condensed Matter Physics With Light And Atoms: Strongly Correlated Cold Fermions in Optical Lattices”, *Uracold Fermi Gases, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CLXIV, Varenna*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (IOS Press, Amsterdam, 2008).
- [18] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen, “Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond”, *Adv. Phys.* **56**, 243–379 (2007).
- [19] W. Hofstetter, “Ultracold atoms in optical lattices: tunable quantum many-body systems”, *Phil. Mag.* **86**, 1891–1906 (2006).
- [20] D. Jaksh and P. Zoller, “The cold atom Hubbard toolbox”, *Ann. Phys.* **315**, 52–79 (2005).
- [21] 久我隆弘著, “量子光学”, 朝倉書店, 2003.

- [22] P. メスター著, 盛永篤郎, 本多 和仁訳, “原子光学”, シュプリンガーフェアラーク東京, 2003 年; P. Meystre, “Atom Optics” (Springer, Singapor, 2001).
- [23] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre, “Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light” (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [24] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, “Quantum Mechanics” (John Wiley & Sons, Singapor, 2005).
- [25] M.O. Scully and M.S. Zubairy, “Quantum Optics” (Cambridge University Press, New York, 1977).
- [26] W. Ketterle and M.W. Zwierlein, “Making, probing and understanding ultracold Fermi gases”, Ultracold Fermi Gases, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CLXIV, Varenna, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (IOS Press, Amsterdam, 2008).
- [27] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn, “Making, probing and understanding Bose–Einstein condensates”, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course CXL, edited by M. Inguscio, S. Stringari and C.E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999).
- [28] R. Grimm, M. Weidemüller, Y.B. Ovchinnikov, “Optical dipole traps for neutral atoms”, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics **42**, 95–170 (2000).
- [29] H. Feshbach, “A unified theory of nuclear reactions II”, Ann. Phys. **19**, 287–313 (1962).
- [30] E. Tiesinga, B.J. Verhaar, and H.T.C. Stoof, “Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions”, Phys. Rev. A **47**, 4114–4122 (1993).
- [31] A.J. Moerdijk, B.J. Verhaar, and A. Axelsson, “Resonances in ultracold collisions of  $^6\text{Li}$ ,  $^7\text{Li}$ , and  $^{23}\text{Na}$ ”, Phys. Rev. A **51**, 4852–4861 (1995).
- [32] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, “Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate”, Nature **392**, 151–154 (1998).
- [33] C. Chin, P. Julienne, and E. Tiesinga, “Feshbach resonances in ultracold gases”, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225–1286 (2010).
- [34] T. Köhler, K. Góral, P.S. Julienne, “Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances”, Rev. Mod. Phys. **78**, 1311–1361 (2006).
- [35] R.A. Duine and H.T.C. Stoof, “Atom-molecule coherence in Bose gases”, Phys. Rep. **396**, 115–195 (2004).
- [36] E. Timmermans, P. Tommasini, M. Hussein, A. Kerman, “Feshbach resonances in atomic Bose–Einstein condensates”, Phys. Rep. **315**, 199–230 (1999).
- [37] M. Lysebo and L. Veseth, “*Ab initio* calculation of Feshbach resonances in cold atomic collisions: *s*- and *p*-wave Feshbach resonances in  $^6\text{Li}_2$ ”, Phys. Rev. A **79**, 062704 (2009).
- [38] 並木美喜雄, 大場一郎著, “散乱の量子力学”, 岩波書店, 1997.
- [39] 砂川重信著, “散乱の量子論”, 岩波書店, 1977.
- [40] K. Huang, “Statistical Mechanics” 2nd ed. (John Wiley & Sons, 1987).
- [41] S.J.J.M.F. Kokkelmans, J.N. Milstein, M.L. Chiofalo, R. Walser, and M.J. Holland, “Resonance superfluidity: Renormalization of resonance scattering theory”, Phys. Rev. A **65**, 053617 (2002).

- [42] T.G. Tiecke, M.R. Goosen, A. Ludewig, S.D. Gensemer, S. Kraft, S.J.J.M.F. Kokkelmans, and J.T.M. Walrav, “Broad Feshbach Resonance in the  $^6\text{Li}$ - $^{40}\text{K}$  Mixture”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 053202 (2010).
- [43] B. Marcelis, E.G.M. van Kempen, B.J. Verhaar, and S.J.J.M.F. Kokkelmans, “Feshbach resonances with large background scattering length: Interplay with open-channel resonances”, *Phys. Rev. A* **70**, 012701 (2004).
- [44] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, R. Geursen, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, A. Simoni, E. Tiesinga, C.J. Williams, and P.S. Julienne, “Precise Determination of  $^6\text{Li}$  Cold Collision Parameters by Radio-Frequency Spectroscopy on Weakly Bound Molecules”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 103201 (2005).
- [45] K.E. Strecker, G.B. Partridge, and R.G. Hulet, “Conversion of an Atomic Fermi Gas to a Long-Lived Molecular Bose Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
- [46] C.A. Regal, M. Greiner, and D.S. Jin, “Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [47] C.A. Regal and D.S. Jin, “Measurement of Positive and Negative Scattering Lengths in a Fermi Gas of Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 230404 (2003).
- [48] J. Schneider and H. Wallis, “Mesoscopic Fermi gas in a harmonic trap”, *Phys. Rev. A* **57**, 1253–1259 (1998).
- [49] W. Zwerger, “Mott–Hubbard transition of cold atoms in optical lattices”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, S9–S16 (2003).
- [50] A.A. Mostofi, J.R. Yates, Y.-S. Lee, I. Souza, D. Vanderbilt, and N. Marzari, “Wannier90: A Tool for Obtaining Maximally-Localised Wannier Functions”, *Comput. Phys. Commun.* **178**, 685 (2008).
- [51] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch, “Interference pattern and visibility of a Mott insulator”, *Phys. Rev. A* **72**, 053606 (2005).
- [52] C. Hooley and J. Quintanilla, “Single-Atom Density of States of an Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 080404 (2004).
- [53] A.M. Rey, G. Pupillo, C. W. Clark, and C.J. Williams, “Ultracold atoms confined in an optical lattice plus parabolic potential: closed-form approach”, *Phys. Rev. A* **72**, 033616 (2005).
- [54] M. Rigol and A. Muramatsu, “Confinement control by optical lattices”, *Phys. Rev. A* **70**, 043627 (2004).
- [55] M. Rigol, A. Muramatsu, G. Batrouni, and R. Scalettar, “Local Quantum Criticality in Confined Fermions on Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 130403 (2003).
- [56] M. Rigol and A. Muramatsu, “Quantum Monte Carlo study of confined fermions in one-dimensional optical lattices”, *Phys. Rev. A* **69**, 053612 (2004).
- [57] R. Jördens, N. Strohmaier, K. Günter, H. Moritz and T. Esslinger, “A Mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice”, *Nature* **455**, 204–207 (2008).
- [58] U. Schneider, L. Hackermüller, S. Will, Th. Best, I. Bloch, T.A. Costi, R.W. Helmes, D. Rasch, and A. Rosch, “Metallic and Insulating Phases of Repulsively Interacting Fermions in a 3D Optical Lattice”, *Science* **322**, 1520–1525 (2008).
- [59] K. Inaba and M. Yamashita, “Time-of-Flight Imaging Method to Observe Signatures of Antiferromagnetically Ordered States of Fermionic Atoms in an Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 173002 (2010).
- [60] E. Altman, E. Demler, and M.D. Lukin, “Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations”, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).

- [61] T. Rom, Th. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Fölling, B. Paredes, and I. Bloch, “Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice”, *Nature* **444**, 733–736 (2006).
- [62] M. Greiner, C.A. Regal, J.T. Stewart, and D.S. Jin, “Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- [63] T. Müller, B. Zimmermann, J. Meineke, J.-P. Brantut, T. Esslinger, and H. Moritz, “Local Observation of Antibunching in a Trapped Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 040401 (2010).
- [64] A.F. Ho, “Fermions in optical lattices near a Feshbach resonance: From band insulator to Mott insulator”, *Phys. Rev. A* **73**, 061601(R) (2006).
- [65] A.M. Rey, V. Gritsev, I. Bloch, E. Demler, and M.D. Lukin, “Preparation and Detection of Magnetic Quantum Phases in Optical Superlattices”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 140601 (2007); A.M. Rey, R. Sensarma, S. Fölling, M. Greiner, E. Demler, and M.D. Lukin, “Controlled preparation and detection of d-wave superfluidity in two-dimensional optical superlattices”, *Euro. Phys. Lett.* **87**, 60001 (2009).
- [66] T.K. Koponen, T. Paananen, J.-P. Martikainen, and P. Törmä, “Finite-Temperature Phase Diagram of a Polarized Fermi Gas in an Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 120403 (2007); T.K. Koponen, T. Paananen, J.-P. Martikainen, M.R. Bakhtiari, and P. Törmä, “FFLO state in 1-, 2- and 3-dimensional optical lattices combined with a non-uniform background potential”, *New J. Phys.* **10**, 045014 (2008).; T. Paananen, T.K. Koponen, P. Törmä, and J.-P. Martikainen, “Noise correlations of the ultracold Fermi gas in an optical lattice”, *Phys. Rev. A* **77**, 053602 (2008).
- [67] B.M. Andersen and G.M. Bruun, “Magnetic and superfluid phases of confined fermions in two-dimensional optical lattices”, *Phys. Rev. A* **76**, 041602(R) (2007).
- [68] A. Lüscher, A.M. Läuchli, and R.M. Noack, “Spatial noise correlations of a chain of ultracold fermions: A numerical study”, *Phys. Rev. A* **76**, 043614 (2007); A. Lüscher, R.M. Noack, and A.M. Läuchli, “Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state in the one-dimensional attractive Hubbard model and its fingerprint in spatial noise correlations”, *Phys. Rev. A* **78**, 013637 (2008).
- [69] M. Rizzi, M. Polini, M.A. Cazalilla, M.R. Bakhtiari, M.P. Tosi, and R. Fazio, “Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov pairing in one-dimensional optical lattices”, *Phys. Rev. B* **77**, 245105 (2008).
- [70] L. Mathey, E. Altman, and A. Vishwanath, “Noise Correlations in One-Dimensional Systems of Ultracold Fermions”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 240401 (2008); L. Mathey, A. Vishwanath, and E. Altman, “Noise correlations in low-dimensional systems of ultracold atoms”, *Phys. Rev. A* **79**, 013609 (2009).
- [71] G.M. Bruun, O.F. Syljuåsen, K.G.L. Pedersen, B.M. Andersen, E. Demler, and A.S. Sørensen, “Antiferromagnetic noise correlations in optical lattices”, *Phys. Rev. A* **80**, 033622 (2009).
- [72] T. Kitagawa, A. Aspect, M. Greiner, and E. Demler, “Phase-Sensitive Measurements of Order Parameters for Ultracold Atoms through Two-Particle Interferometry”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115302 (2011).
- [73] Y. Shin, M.W. Zwierlein, C.H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle, “Observation of Phase Separation in a Strongly Interacting Imbalanced Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030401 (2006).
- [74] C. Kollath, A. Iucci, I.P. McCulloch, and T. Giamarchi, “Modulation spectroscopy with ultracold fermions in an optical lattice”, *Phys. Rev. A* **74**, 041604(R) (2006); C. Kollath,

- A. Iucci, T. Giamarchi, W. Hofstetter, and U. Schollwöck, “Spectroscopy of Ultracold Atoms by Periodic Lattice Modulations”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 050402 (2006).
- [75] R. Sensarma, D. Pekker, M.D. Lukin, and E. Demler, “Modulation Spectroscopy and Dynamics of Double Occupancies in a Fermionic Mott Insulator”, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 035303 (2009).
- [76] A. Tokuno and T. Giamarchi, “Spectroscopy for Cold Atom Gases in Periodically Phase-Modulated Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 205301 (2011).
- [77] S. Gupta, Z. Hadzibabic, M.W. Zwierlein, C.A. Stan, K. Dieckmann, C.H. Schunck, E.G.M. van Kempen, B.J. Verhaar, and W. Ketterle, “Radio-Frequency Spectroscopy of Ultracold Fermions”, *Science* **300**, 1723–1726 (2003).
- [78] C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, J.H. Denschlag, and R. Grimm, “Observation of the Pairing Gap in a Strongly Interacting Fermi Gas”, *Science* **305**, 1128–1130 (2004).
- [79] J.T. Stewart, J.P. Gaebler, and D.S. Jin, “Using photoemission spectroscopy to probe a strongly interacting Fermi gas”, *Nature* **454**, 744–747 (2008).
- [80] J.P. Gaebler, J.T. Stewart, T.E. Drake, D.S. Jin, A. Perali, P. Pieri, and G.C. Strinati, “Observation of pseudogap behaviour in a strongly interacting Fermi gas”, *Nature Phys.* **6**, 569–573 (2010).
- [81] A. Damascelli, Z. Hussain, and Z.-X. Shen, “Angle-resolved photoemission studies of the cuprate superconductors”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 473–541 (2003).
- [82] H. Hu, X.-J. Liu, P.D. Drummond, and H. Dong, “Pseudogap Pairing in Ultracold Fermi Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 240407 (2010).
- [83] R. Watanabe, S. Tsuchiya, and Y. Ohashi, “Superfluid density of states and pseudogap phenomenon in the BCS-BEC crossover regime of a superfluid Fermi gas”, *Phys. Rev. A* **82**, 043630 (2010).
- [84] G. Veeravalli, E. Kuhnle, P. Dyke, and C.J. Vale, “Bragg Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 250403 (2008).
- [85] W.S. Bakr, A. Peng, M.E. Tai, R. Ma, J. Simon, J.I. Gillen, S. Fölling, L. Pollet, and M. Greiner, “Probing the Superfluid to Mott Insulator Transition at the Single-Atom Level”, *Science* **329**, 547–550 (2010).
- [86] J.F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr, “Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator”, *Nature* **467**, 68–72 (2010).
- [87] バーバラ・ゴス・レヴィ著, 高橋義朗訳, “量子気体を顕微鏡で見る”, *パリティ* **26**, 28–30 (2011).
- [88] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, and T. Esslinger, “Fermionic Atoms in a Three Dimensional Optical Lattice: Observing Fermi Surfaces, Dynamics, and Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 080403 (2005).
- [89] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* **415**, 39–44 (2002).
- [90] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, C. Schori, and T. Esslinger, “Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions”, *J. Low Temp. Phys.* **138**, 635 (2005).
- [91] I.B. Spielman, W.D. Phillips, and J.V. Porto, “Mott-Insulator Transition in a Two-Dimensional Atomic Bose Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 080404 (2007).
- [92] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, and T. Esslinger, “Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 130403 (2004).

- [93] S. Franke-Arnold, J. Leach, M.J. Padgett, V.E. Lembessis, D. Ellinas, A.J. Wright, J.M. Girkin, P. Ohberg, and A.S. Arnold, “Optical ferris wheel for ultracold atoms”, *Opt. Express* **15**, 8619–8625 (2007).
- [94] X. He, P. Xu, J. Wang, and M. Zhan, “Rotating single atoms in a ring lattice generated by a spatial light modulator”, *Opt. Express* **17**, 21007–21014 (2009).
- [95] M. Anderlini, P.J. Lee, B.L. Brown, J. Sebby-Strabley, W.D. Phillips, and J.V. Porto, “Controlled exchange interaction between pairs of neutral atoms in an optical lattice”, *Nature* **448**, 452–456 (2007).
- [96] S. Fölling, S. Trotzky, P. Cheinet, M. Feld, R. Saers, A. Widera, T. Müller, and I. Bloch, “Direct observation of second-order atom tunnelling”, *Nature* **448**, 1029–1032 (2007).
- [97] S. Trotzky, P. Cheinet, S. Fölling, M. Feld, U. Schnorrberger, A.M. Rey, A. Polkovnikov, E.A. Demler, M.D. Lukin, and I. Bloch, “Time-Resolved Observation and Control of Superexchange Interactions with Ultracold Atoms in Optical Lattices”, *Science* **319**, 295–299 (2008).
- [98] J. Sebby-Strabley, M. Anderlini, P.S. Jessen, and J.V. Porto, “Lattice of double wells for manipulating pairs of cold atoms”, *Phys. Rev. A* **73**, 033605 (2006).
- [99] C. Becker, P. Soltan-Panahi, J. Kronjäger, S. Dörscher, K. Bongs, and K. Sengstock, “Ultracold quantum gases in triangular optical lattices”, *New J. Phys.* **12**, 065025 (2010).
- [100] J. Struck, C. Ölschläger, R. Le Targat, P. Soltan-Panahi, A. Eckardt, M. Lewenstein, P. Windpassinger, and K. Sengstock, “Quantum simulation of frustrated magnetism in triangular optical lattices”, arXiv:1103.5944.
- [101] P. Soltan-Panahi, J. Struck, P. Hauke, A. Bick, W. Plenkers, G. Meineke, C. Becker, P. Windpassinger, M. Lewenstein, and K. Sengstock, “Multi-component quantum gases in spin-dependent hexagonal lattices”, *Nature Phys.* **7**, 434–440 (2011).
- [102] L. Santos, M.A. Baranov, J.I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann, and M. Lewenstein, “Atomic Quantum Gases in Kagom Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 030601 (2004).
- [103] R. Shen, L.B. Shao, B. Wang, and D.Y. Xing, “Single Dirac cone with a flat band touching on line-centered-square optical lattices”, *Phys. Rev. B* **81**, 041410(R) (2010).
- [104] V. Apaja, M. Hyrkäs, and M. Manninen, “Flat bands, Dirac cones, and atom dynamics in an optical lattice”, *Phys. Rev. A* **82**, 041402(R) (2010).
- [105] N. Goldman, D.F. Urban, and D. Bercioux, “Topological phases for fermionic cold atoms on the Lieb lattice”, *Phys. Rev. A* **83**, 063601 (2011).
- [106] M. White, M. Pasienski, D. McKay, S.Q. Zhou, D. Ceperley, and B. DeMarco, “Strongly Interacting Bosons in a Disordered Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 055301 (2009).
- [107] L. Sanchez-Palencia and M. Lewenstein, “Disordered quantum gases under control”, *Nature Phys.* **6**, 87–95 (2010).
- [108] G. Modugno, “Anderson localization in BoseEinstein condensates”, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 102401 (2010).
- [109] A. Aspect and M. Inguscio, “Anderson localization of ultracold atoms”, *Physics Today* **62**, 30 (2009).
- [110] D. Semmler, J. Wernsdorfer, U. Bissbort, K. Byczuk, and W. Hofstetter, “Localization of correlated fermions in optical lattices with speckle disorder”, *Phys. Rev. B* **82**, 235115 (2010).
- [111] D. Boiron, A. Michaud, J.M. Fournier, L. Simard, M. Sprenger, G. Grynberg, and C. Salomon, “Cold and dense cesium clouds in far-detuned dipole traps”, *Phys. Rev. A* **57**, R4106–R4109 (1998).

- [112] R. Newell, J. Sebby, and T.G. Walker, “Dense atom clouds in a holographic atom trap”, *Opt. Lett.* **28**, 1266–1268 (2003).
- [113] R. Dumke, M. Volk, T. M  ther, F.B.J. Buchkremer, G. Birkl, and W. Ertmer, “Micro-optical Realization of Arrays of Selectively Addressable Dipole Traps: A Scalable Configuration for Quantum Computation with Atomic Qubits”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 097903 (2002).
- [114] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T.W. Hänsch, and I. Bloch, “Coherent Transport of Neutral Atoms in Spin-Dependent Optical Lattice Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010407 (2003).
- [115] W.V. Liu, F. Wilczek, and P. Zoller, “Spin-dependent Hubbard model and a quantum phase transition in cold atoms”, *Phys. Rev. A* **70**, 033603 (2004).
- [116] L.-M. Duan, E. Demler, and M. Lukin, “Controlling Spin Exchange Interactions of Ultracold Atoms in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 090402 (2003).
- [117] S. Tung, V. Schweikhard, and E.A. Cornell, “Observation of Vortex Pinning in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 240402 (2006).
- [118] R.A. Williams, S. Al-Assam, and C.J. Foot, “Observation of Vortex Nucleation in a Rotating Two-Dimensional Lattice of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050404 (2010).
- [119] B. DeMarco and D.S. Jin, “Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas”, *Science* **285**, 1703–1706 (1999).
- [120] A.G. Truscott, K.E.—Strecker, W.I. McAlexander, G.B. Partridge, and R.G. Hulet, “Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms”, *Science* **291**, 2570–2572 (2001).
- [121] J.M. McNamara, T. Jelte, A.S. Tychkov, W. Hogervorst, and W. Vassen, “Degenerate Bose-Fermi Mixture of Metastable Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 080404 (2006).
- [122] T. Fukuhara, Y. Takasu, M. Kumakura, and Y. Takahashi, “Degenerate Fermi Gases of Ytterbium”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030401 (2007).
- [123] B.J. DeSalvo, M. Yan, P.G. Mickelson, Y.N. Martinez de Escobar, and T.C. Killian, “Degenerate Fermi Gas of  $^{87}\text{Sr}$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030402 (2010).
- [124] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio, “Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230402 (2004).
- [125] G. Modugno, F. Ferlaino, R. Heidemann, G. Roati, and M. Inguscio, “Production of a Fermi gas of atoms in an optical lattice”, *Phys. Rev. A* **68**, 011601(R) (2003).
- [126] L. Pezz  , L. Pitaevskii, A. Smerzi, and S. Stringari, “Insulating Behavior of a Trapped Ideal Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 120401 (2004).
- [127] T.A.B. Kennedy, “Oscillations of atomic fermions in a one-dimensional optical lattice”, *Phys. Rev. A* **70**, 023603 (2004).
- [128] V. Ruuska and P. T  rm  , “Quantum transport of non-interacting Fermi gas in an optical lattice combined with harmonic trapping”, *New J. Phys.* **6**, 59 (2004).
- [129] H. Ott, E. de Mirandes, F. Ferlaino, G. Roati, G. Modugno, and M. Inguscio, “Collisionally Induced Transport in Periodic Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 160601 (2004).
- [130] G. Orso, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Umklapp Collisions and Center-of-Mass Oscillations of a Trapped Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 020404 (2004).
- [131] A.R. Kolovsky, “Atomic current in optical lattices: Reexamination of the Esaki-Tsu equation”, *Phys. Rev. A* **77**, 063604 (2008).

- [132] N. Strohmaier, Y. Takasu, K. Günter, R. Jördens, M. Köhl, H. Moritz, and T. Esslinger, “Interaction-Controlled Transport of an Ultracold Fermi Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 220601 (2007).
- [133] J.K. Chin, D.E. Miller, Y. Liu, C. Stan, W. Setiawan, C. Sanner, K. Xu, and W. Ketterle, “Evidence for superfluidity of ultracold fermions in an optical lattice”, *Nature* **443**, 961–964 (2006).
- [134] A.A. Burkov and A. Paramekanti, “Multiband superfluidity and superfluid-to-band-insulator transition of strongly interacting fermionic atoms in an optical lattice”, *Phys. Rev. A* **79**, 043626 (2009).
- [135] N. Strohmaier, D. Greif, R. Jördens, L. Tarruell, H. Moritz, and T. Esslinger, R. Sensarma, D. Pekker, E. Altman, and E. Demler, “Observation of Elastic Doublon Decay in the Fermi-Hubbard Model”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 080401 (2010).
- [136] R. Sensarma, D. Pekker, E. Altman, E. Demler, N. Strohmaier, D. Greif, R. Jördens, L. Tarruell, H. Moritz, and T. Esslinger, “Lifetime of double occupancies in the Fermi-Hubbard model”, *Phys. Rev. B* **82**, 224302 (2010).
- [137] L. Hackermüller, U. Schneider, M. Moreno-Cardoner, T. Kitagawa, T. Best, S. Will, E. Demler, E. Altman, I. Bloch, and B. Paredes, “Anomalous Expansion of Attractively Interacting Fermionic Atoms in an Optical Lattice”, *Science* **327**, 1621–1624 (2010).
- [138] S. Taie, Y. Takasu, S. Sugawa, R. Yamazaki, T. Tsujimoto, R. Murakami, and Y. Takahashi, “Realization of a  $SU(2) \times SU(6)$  System of Fermions in a Cold Atomic Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190401 (2010).
- [139] D. Greif, L. Tarruell, T. Uehlinger, R. Jördens, and T. Esslinger, “Probing Nearest-Neighbor Correlations of Ultracold Fermions in an Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 145302 (2011).
- [140] T. Müller, S. Fölling, A. Widera, and I. Bloch, “State Preparation and Dynamics of Ultracold Atoms in Higher Lattice Orbitals”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 200405 (2007).
- [141] G. Wirth, M. Ölschläger, and A. Hemmerich, “Evidence for orbital superfluidity in the P-band of a bipartite optical square lattice”, *Nature Phys.* **7**, 147–153 (2011).
- [142] M. Ölschläger, G. Wirth, and A. Hemmerich, “Unconventional Superfluid Order in the F Band of a Bipartite Optical Square Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 015302 (2011).
- [143] Y.-J. Lin, R.L. Compton, K. Jiménez-García, J.V. Porto, and I.B. Spielman, “Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms”, *Nature* **462**, 628–632 (2009).
- [144] Y.-J. Lin, R.L. Compton, A.R. Perry, W.D. Phillips, J.V. Porto, and I.B. Spielman, “Bose–Einstein Condensate in a Uniform Light-Induced Vector Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 130401 (2009).
- [145] Y.-J. Lin, R.L. Compton, K. Jiménez-García, W.D. Phillips, J.V. Porto, and I.B. Spielman, “A synthetic electric force acting on neutral atoms”, *Nature Phys.* **7**, 531–534 (2011).
- [146] Y.-J. Lin, K. Jiménez-García, and I.B. Spielman, “Spin-orbit-coupled Bose–Einstein condensates”, *Nature* **471**, 83–86 (2011).
- [147] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, P. Öhberg, “Artificial gauge potentials for neutral atoms”, arXiv:1008.5378.
- [148] A. Eckardt and M. Lewenstein, “Controlled hole doping of a Mott insulator of ultracold fermionic atoms”, *Phys. Rev. A* **82**, 011606(R) (2010).
- [149] L.-M. Duan, “Effective Hamiltonian for Fermions in an Optical Lattice across a Feshbach Resonance”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 243202 (2005); L.-M. Duan, “General Hubbard model



- for strongly interacting fermions in an optical lattice and its phase detection”, EPL **81**, 20001 (2008).
- [150] M. Machida, M. Okumura, S. Yamada, T. Deguchi, Y. Ohashi, H. Matsumoto, “Mott phase in polarized two-component atomic Fermi lattice gas: A playground for  $S = 1/2$  Heisenberg model in magnetic field”, Phys. Rev. B **78**, 235117 (2008).
  - [151] G.-B. Jo, Y.-R. Lee, J.-H. Choi, C.A. Christensen, T.H. Kim, J.H. Thywissen, D.E. Pritchard, and W. Ketterle, “Itinerant Ferromagnetism in a Fermi Gas of Ultracold Atoms”, Science **325**, 1521–1524 (2009).
  - [152] D. Pekker, M. Babadi, R. Sensarma, N. Zinner, L. Pollet, M.W. Zwierlein, and E. Demler, “Competition between Pairing and Ferromagnetic Instabilities in Ultracold Fermi Gases near Feshbach Resonances”, Phys. Rev. Lett. **106**, 050402 (2011).
  - [153] J. Simon, W.S. Bakr, R. Ma, M.E. Tai, P.M. Preiss, and M. Greiner, “Quantum simulation of antiferromagnetic spin chains in an optical lattice”, Nature **472**, 307–312 (2011).
  - [154] E.V. Gorelik, I. Titvinidze, W. Hofstetter, M. Snoek, and N. Blümer, “Néel Transition of Lattice Fermions in a Harmonic Trap: A Real-Space Dynamic Mean-Field Study”, Phys. Rev. Lett. **105**, 065301 (2010).
  - [155] S. Fuchs, E. Gull, L. Pollet, E. Burovski, E. Kozik, T. Pruschke, and M. Troyer, “Thermodynamics of the 3D Hubbard Model on Approaching the Néel Transition”, Phys. Rev. Lett. **106**, 030401 (2011).
  - [156] J. von Stecher, E. Demler, M.D. Lukin, and A.M. Rey, “Probing interaction-induced ferromagnetism in optical superlattices”, New J. Phys. **12**, 055009 (2010).
  - [157] M. Okumura, S. Yamada, M. Machida, and H. Aoki, “Phase-separated ferromagnetism in a spin-imbalanced system of Fermi atoms loaded in an optical ladder: A density-matrix renormalization-group study”, Phys. Rev. A **83**, 031606(R) (2011).
  - [158] L. Wang, X. Dai, S. Chen<sup>1</sup>, and X.C. Xie, “Magnetism of cold fermionic atoms on the p band of an optical lattice”, Phys. Rev. A **78**, 023603 (2008).
  - [159] S. Zhang, H. Hung, and C. Wu, “Proposed realization of itinerant ferromagnetism in optical lattices”, Phys. Rev. A **82**, 053618 (2010).
  - [160] K. Noda, A. Koga, N. Kawakami, and T. Pruschke, “Ferromagnetism of cold fermions loaded into a decorated square lattice”, Phys. Rev. A **80**, 063622 (2009).
  - [161] M. Okumura, S. Yamada, M. Machida, and T. Sakai, “Polarization plateau in an atomic Fermi gas loaded on a three-leg triangular optical lattice”, Phys. Rev. A **79**, 061602(R) (2009).
  - [162] W. Hofstetter, J.I. Cirac, P. Zoller, E. Demler, and M.D. Lukin, “High-Temperature Superfluidity of Fermionic Atoms in Optical Lattices”, Phys. Rev. Lett. **89**, 220407 (2002).
  - [163] Y. Fujihara, A. Koga, and N. Kawakami, “Superfluid properties of ultracold fermionic atoms in two-dimensional optical lattices”, Phys. Rev. A **81**, 063627 (2010).
  - [164] A. Moreo and D.J. Scalapino, “Cold Attractive Spin Polarized Fermi Lattice Gases and the Doped Positive  $U$  Hubbard Model”, Phys. Rev. Lett. **98**, 216402 (2007).
  - [165] A.F. Ho, M. A. Cazalilla, and T. Giamarchi, “Quantum simulation of the Hubbard model: The attractive route”, Phys. Rev. A **79**, 033620 (2009).
  - [166] H. Tamaki, K. Miyake, and Y. Ohashi, “ $d$ -Wave Spin Density Wave Phase in the Attractive Hubbard Model with Spin Polarization”, J. Phys. Soc. Jpn. **78**, 073001 (2009).
  - [167] 手塚真樹, 物性研究 **95**, 34 (2010).